

Gegeben $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \min\{r_1, r_2\}$ wissen wir die absolute Konvergenz

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |a_k x^k| < \infty, \quad \sum_{l \in \mathbb{N}_0} |b_l x^l| < \infty, \quad \text{also auch}$$

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} |a_k b_l x^{k+l}| &= \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} |a_k x^k| |b_l x^l| \stackrel{\text{großer Umordnungssatz mit Summanden } \geq 0}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{l \in \mathbb{N}_0} |a_k x^k| |b_l x^l| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(|a_k x^k| \sum_{l \in \mathbb{N}_0} |b_l x^l| \right) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |a_k x^k| \right)}_{< \infty} \cdot \underbrace{\left(\sum_{l \in \mathbb{N}_0} |b_l x^l| \right)}_{< \infty} < \infty \quad \text{"absolute Summierbarkeit"} \end{aligned}$$

Es folgt mit der gleichen Rechnung ohne Absolutbeträge:

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} &= \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k x^k b_l x^l \stackrel{\text{großer Umordnungssatz unter absoluter Summierbarkeit, begründet durch "absolute Summierbarkeit"}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{l \in \mathbb{N}_0} a_k x^k b_l x^l \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(a_k x^k \sum_{l \in \mathbb{N}_0} b_l x^l \right) \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{l \in \mathbb{N}_0} b_l x^l \right) \end{aligned}$$

Andererseits gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ die Konvergenz $1_{\{k+l \leq n\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

also auch $a_k b_l x^{k+l} 1_{\{k+l \leq n\}} \rightarrow a_k b_l x^{k+l}$ "punktweise Konvergenz"

sowie $|a_k b_l x^{k+l} 1_{\{k+l \leq n\}}| \leq |a_k b_l x^{k+l}|$ "Majorante"

Es folgt

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} \stackrel{\text{dominierte Konvergenz, anwendbar wegen "punktweise Konvergenz" und "Majorante" mittels "absoluter Summierbarkeit"}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} 1_{\{k+l \leq n\}}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} 1_{\{k+l \leq n\}} \stackrel{\text{endliche Summe}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} 1_{\{k+l=m\}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l 1_{\{k+l=m\}} \right) x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right) x^m \quad \text{nur Summanden mit } k \leq m, l = m-k \text{ tragen bei} \end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} x^{\ell} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right) x^m,$$

wobei alle hier vorkommenden Reihen absolut konvergieren. $\square$