

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

Sei $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ gegeben. Nehme an es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}_0 \forall n > m : |a_n| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $p \in \mathbb{N}_0$ nach Gleichung (1) so groß, dass

$$\forall n > p : a_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

gilt. Dann gilt insbesondere auch

$$\forall n \geq p + 1 \in \mathbb{N} : a_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (3)$$

Insgesamt gilt dann also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}_0 \forall n > m : |a_n| \leq \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |a_n| < \varepsilon. \quad (4)$$

□

Aufgabe 2

a): Wir finden im Skript auf Seite 83:

Satz 1. *Es sei $(a_n^{(i)})_{n,i \in \mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge, d.h. eine Folge von Folgen in $\mathbb{C}$. Wir nehmen an:*

1. *Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ existiere $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$ in $\mathbb{N}$.*
2. *Es existiere $b^{(i)} \geq 0$, für alle $i \in \mathbb{N}_0$, mit $\sum_{i=0}^{\infty} b^{(i)} < +\infty$, so dass für alle $n, i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|a_n^{(i)}| \leq b^{(i)}$.*

Dann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(i)}$ in $\mathbb{C}$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}. \quad (5)$$

b): Wir zeigen zuerst ein paar Hilfslemmata.

Lemma 1. *Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y \quad (\text{Monotonie})$$

Beweis: Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$, folglich gilt dann

$$e^{y-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{k!} \geq 1, \quad (6)$$

aufgrund von $y \geq x$ und der Definition der Exponentialfunktion. Mit Satz 3.41 des Skriptes folgt dann $e^y \geq e^x$.

Lemma 2. Seien $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq m+1$ gegeben. Es gilt

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+2-x}. \quad (\text{Fehlerabschätzung})$$

Beweis: Dieser erfolgt durch eine kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} &= \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{l=0}^k \frac{x}{m+1+l} \leq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(m+2)^k} \\ &= \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{1 - \frac{x}{m+2}} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+2-x} \end{aligned} \quad (7)$$

Lemma 3. Die Exponentialfunktion ist stetig

Beweis: Es ist zu zeigen, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |e^x - e^y| < \varepsilon \quad (8)$$

gilt. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = \frac{2}{1 + \frac{2}{\varepsilon}e^x} < 2$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$ gegeben. Dann folgt für den Abstand der Funktionswerte

$$\begin{aligned} |e^x - e^y| &\stackrel{\text{Satz 3.41, VL}}{=} e^x |1 - e^{y-x}| = e^x \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{k!} \right| \leq e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y-x|^k}{k!} < e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \\ &\stackrel{\text{Lemma 2}}{=} e^x \delta \frac{2}{2 - \delta} = e^x \delta \frac{2}{2 - \frac{2}{1 + \frac{2}{\varepsilon}e^x}} = e^x \frac{2}{1 + \frac{2}{\varepsilon}e^x} \frac{1 + \frac{2}{\varepsilon}e^x}{\frac{2}{\varepsilon}e^x} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Nun zur Aufgabe. Wir wollen also den Satz der dominierten Konvergenz für Reihen mit $a_n^{(i)} = \exp(-i + \frac{n}{i}e^{-\frac{n}{i}})$, $i, n \in \mathbb{N}$ anwenden. Die Bedingung 1. ist mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion, Satz 3.45c) und Aufgabe 5 von Blatt 8 erfüllt. Wir wählen als Majorante

$$b^{(i)} = e^{-i+1}. \quad (10)$$

Aufgrund von Lemma 1 reicht es zu sehen, dass der Exponent von $b^{(i)}$ größer als der Exponent von $a_n^{(i)}$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$ ist. Nach der Definition der Exponentialfunktion gilt aber

$$\frac{n}{i} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{i}\right)^k}{k!} = e^{\frac{n}{i}}, \quad (11)$$

woraus dies folgt. Weil die Folge $b^{(i)}$ auch summierbar ist, gilt auch die zweite Voraussetzung des Satzes. Insgesamt gilt damit

$$\begin{aligned}
x &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-n + \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(-n + \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 3, Satz 3.45c}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-n + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-n} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{e-1}.
\end{aligned} \tag{12}$$

□

Aufgabe 3

- a): Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, r , z , y wie in der Aufgabenstellung. Wir betrachten die folgende Reihe in den erweiterten reellen Zahlen. Mit dem großen Umordnungssatz (Satz 3.40) und weil $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius r hat gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \binom{k+l}{k} |a_{k+l} y^l z^k| &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} |a_s| |y|^{s-k} |z|^k = \sum_{s=0}^{\infty} |a_s| \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} |y|^{s-k} |z|^k \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} |a_s| (|y| + |z|)^s < \infty.
\end{aligned} \tag{13}$$

- b): Weil die in Teilaufgabe a) abgeschätzte Reihe konvergiert und die Summanden dieser Reihe der Absolutbetrag der Summanden von

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \tag{14}$$

sind, konvergiert auch die Reihe (14). Nachdem dieser Schluss für alle $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| + |y| < r$ gilt, hat die als Potenzreihe aufgefasste Reihe (14) mindestens den Konvergenzradius $r - |y|$. Mit den gleichen Rechenschritten wie in Teilaufgabe a) folgt dann

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k z^k = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k (z + y)^k. \tag{15}$$

□

Aufgabe 4

Sei $s > 1$ gegeben. Wir halten uns an den Tipp der Aufgabe und zeigen zuerst induktiv

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{l^s} \leq 2^{s-1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2^{s-1})^n}. \tag{16}$$

Nachdem die rechte Seite der Ungleichung (16) konvergiert, ist dann über das Majorantenkriterium die Konvergenz einer Teilfolge der Folge

$$\left(\sum_{k=1}^M \frac{1}{k^s} \right)_{M \in \mathbb{N}} \quad (17)$$

gezeigt. Nachdem diese Folge aber monoton in M steigt, konvergiert sie auch und gegen den gleichen Grenzwert wie ihre Teilfolge.

Beweis von (16): Für $k = 0$ stimmt die zu zeigende Formel offenbar. Nehme also an, sie gilt für k und zeige sie für $k + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{l^s} &= \sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{l^s} + \sum_{l=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{l^s} \stackrel{\text{Induktionsvoraussetzung}}{\leq} 2^{s-1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2^{s-1})^n} + \sum_{l=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{(2^k)^s} \\ &\leq 2^{s-1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2^{s-1})^n} + \frac{2^k}{(2^k)^s} = 2^{s-1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2^{s-1})^n} + \frac{1}{(2^k)^{s-1}} \\ &= 2^{s-1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2^{s-1})^n} + \frac{2^{s-1}}{(2^{s-1})^{k+1}} = 2^{s-1} \sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{(2^{s-1})^n}. \end{aligned} \quad (18)$$

□

Aufgabe 5

- a): Sei $v \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{R} \ni s > 1$. Nach Aufgabe 4 konvergiert die Reihe, welche die Riemannsche Zetafunktion definiert. Es bezeichne $j_{\max}$ den Index nach dem v konstant Null ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1_{\{n \in M_v\}}}{n^s} &= \sum_{n \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} 1_{\{n \in M_v\}} \frac{1_{\{n \in M_v\}}}{\prod (n)^s} = \sum_{n \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} 1_{\{n \in M_v\}} \prod_{j \in \mathbb{N}} p_j^{-n_j s} \\ &= \sum_{\substack{n_1 \in \{0, \dots, v_1\} \\ \vdots \\ n_{j_{\max}} \in \{0, \dots, v_{j_{\max}}\}}} 1_{\{n \in M_v\}} \prod_{j=1}^{j_{\max}} p_j^{-n_j s} = \prod_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{l=0}^{v_j} p_j^{-s l} \\ &= \prod_{j=1}^{j_{\max}} \frac{1 - p_j^{-(v_j+1)s}}{1 - p_j^{-s}} = \prod_{j \in \mathbb{N}} \frac{1 - p_j^{-(v_j+1)s}}{1 - p_j^{-s}}. \end{aligned} \quad (19)$$

- b): Wir wählen $(v_u)_{u \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ mit

$$v_{u,r} = \begin{cases} u & \text{für } r \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20)$$

Wir setzen dann für die in Teilaufgabe a) gezeigte Gleichung v_u für v ein. Die Gleichung erhält dann Gestalt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1_{\{n \in M_{v_u}\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^m \frac{1 - p_j^{-(u+1)s}}{1 - p_j^{-s}}. \quad (21)$$

Wir nehmen dann den Grenzwert dieses Ausdrucks für u gegen unendlich (dieser existiert, weil die rechte Seite der Gleichung ein endliches Produkt von Ausdrücken ist deren Grenzwert existiert). Es folgt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1_{\{n \in M_{v_u}\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - p_j^{-s}}. \quad (22)$$

Der Limes vertauscht dann mit der Reihe, weil die Reihe in Gleichung (22) uniform durch die Reihe ohne Indikatorfunktion beschränkt ist und diese absolut summierbar ist. Daher gilt mit dem Satz der dominierten Konvergenz

$$\prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - p_j^{-s}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1_{\{n \in M_{v_u}\}}}{n^s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1_{\{n \in M_{v_u}\}}}{n^s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1_{\{n \in L_m\}}}{n^s}. \quad (23)$$

□

- c): Für diese Teilaufgabe stellen wir fest, dass alle Summanden der rechten Reihe in (23) monoton in m steigen. Wir können daher den Satz der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-s}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - p_j^{-s}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1_{\{n \in L_m\}}}{n^s} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1_{\{n \in L_m\}}}{n^s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}. \end{aligned} \quad (24)$$

□