

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

- (a) Aus dem Skript: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}_0 \forall k > m \forall l > m : |a_k - a_l| < \varepsilon.$$

- (b) Wir definieren

$$n(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{N}_0 \forall m > K : n(m) > M.$$

- (c) Wir definieren

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = c \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall m > N : |b_m - c| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N}_0 \forall n > M : |b_n - c| < \varepsilon.$$

- (d) Nach (i.) und Satz 3.12 ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, es existiert also $\mathbb{C} \ni a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Wir zeigen nun, dass $a = c$. In einem ersten Schritt finden wir eine Teilfolge von (a_n) , die auch eine Teilfolge von (b_m) ist. Dies wiederum ist möglich, wenn wir eine streng monoton steigende Teilfolge von $(n(m))_{m \in \mathbb{N}}$ finden.

Wir setzen $k_0 = 0$ und definieren für $j \geq 0$ rekursiv $k_{j+1} = \min\{l > k_j : n(l) > n(k_j)\}$. Da $n(\cdot)$ nach (ii.) unbeschränkt ist, ist die Folge (k_j) wohldefiniert und per Definition streng monoton steigend. Ebenfalls per Definition gilt des Weiteren $n(k_j) < n(k_{j+1})$ für alle $j \geq 0$. Definieren wir also die Folge $(n'(j))$ als $n'(j) = n(k_j)$ für $j \in \mathbb{N}_0$, so ist $(n'(j))_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine streng monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$. Folglich ist

$$(a_{n'(j)})_{j \in \mathbb{N}_0} = (a_{n(k_j)})_{j \in \mathbb{N}_0} \stackrel{\text{(iii.)}}{=} (b_{k_j})_{j \in \mathbb{N}_0}$$

eine Teilfolge von (a_n) als auch eine Teilfolge von (b_m) . Als Teilfolge der konvergenten Folge (b_m) wissen wir mit (iv.), dass $a_{n'(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c$. Als Teilfolge der konvergenten Folge (a_n) gilt jedoch ebenso $a_{n'(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$ und daher $c = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n'(j)} = a$.

Aufgabe 2

- (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$2(a_{n+1} - b_{n+1}) = a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0,$$

also folgt zusammen mit $a_0 \geq b_0$, dass $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \stackrel{b_n \leq a_n}{\leq} \frac{2a_n}{2} = a_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \stackrel{a_n \geq b_n}{\geq} \sqrt{b_n^2} = b_n.$$

- (b) Zuerst zeigen wir, dass jede reelle Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nach oben beschränkt und monoton steigend ist, konvergiert.

Sei also $C := \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $c := \sup C \in \mathbb{R}$. Wir wählen $\epsilon > 0$ und bemerken, dass $c - \epsilon$ keine obere Schranke für C ist, da c die kleinste obere Schranke von C ist. Damit gilt: Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$c - \epsilon < c_m \leq c.$$

Da die Folge monoton steigend ist, gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$:

$$c - \epsilon < c_n \leq c$$

und somit

$$|c_n - c| < \epsilon$$

für alle $n > m$. Das heißt, die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen c .

Analog zeigt man, dass nach unten beschränkte und monoton fallende Folgen konvergieren. Da sowohl (a_n) als auch (b_n) monoton und beschränkt sind, konvergieren beide Folgen in $\mathbb{R}$ und es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. Weiterhin ist $a \geq b$: Es ist $b = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$ und da $b_m \leq a_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist jedes Folgenglied aus (a_n) eine obere Schranke der Folge (b_n) .

Nehme nun also an, $a \neq b$ und damit $a = b + \Delta$ für ein $\Delta > 0$. Aufgrund der Konvergenz der Folge (a_n) können wir n groß genug wählen, sodass $a_n < a + \Delta/2$. Doch dann gilt

$$a \leq a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a + \Delta/2 + b}{2} = \frac{2a - \Delta/2}{2} = a - \frac{\Delta}{4} < a,$$

ein Widerspruch.

Aufgabe 3

Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \min\{r_1, r_2\}$. Aufgrund der Wahl von x konvergieren sowohl $g(x)$ wie auch $f(x)$ absolut, d.h. $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |a_k x^k| < \infty$ und $\sum_{l \in \mathbb{N}_0} |b_l x^l| < \infty$ gilt. Wir bemerken zunächst, dass somit auch die Reihe $\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l}$ absolut konvergiert, denn

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} |a_k b_l x^{k+l}| &= \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} |a_k x^k| |b_l x^l| = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}_0} |a_k x^k| |b_l x^l| \right) \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |a_k x^k| \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{N}_0} |b_l x^l| \right) < \infty, \end{aligned}$$

wobei man für die zweite Gleichheit den Umordnungssatz für Reihen mit nicht-negativen Summanden verwendet. Analog zeigt man für die Reihe ohne Absolutbeträge

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} &= \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k x^k b_l x^l = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}_0} a_k x^k b_l x^l \right) \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k x^k \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{N}_0} b_l x^l \right), \end{aligned}$$

wobei man für die zweite Gleichheit den Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen verwendet.

Zu zeigen bleibt die Identität $h(x) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l}$. Dafür benutzen wir den Satz von der dominierten Konvergenz auf die folgende Weise: Betrachte die (Doppel-)Folge

$$(a_k b_l x^{k+l} \mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}})_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2, n \in \mathbb{N}_0},$$

wobei $\mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}}$ die Indikatorfunktion ist, die den Wert 1 annimmt falls $k+l \leq n$ und 0 sonst. Es gilt dann die punktweise Konvergenz

$$a_k b_l x^{k+l} \mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}} \rightarrow a_k b_l x^{k+l}$$

für $n \rightarrow \infty$ (da $\mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $(k,l) \in \mathbb{N}_0^2$). Darüber hinaus sehen wir, dass

$$|a_k b_l x^{k+l} \mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}}| < |a_k b_l x^{k+l}|$$

für alle $k, l, n \in \mathbb{N}$ gilt, und wir somit eine absolut summierbare Majorante für unsere Folge haben. Die Annahmen aus dem Satz von der dominierten Konvergenz sind somit erfüllt und wir können darauf schließen, dass

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} \mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}}$$

Um nun die Identität zwischen der rechten Seite dieser Gleichung und $h(x)$ zu zeigen, schreiben wir den Indikator $\mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}}$ als die (endliche) Summe von Indikatoren $\sum_{m=0}^n \mathbb{1}_{\{k+l=m\}}$ um und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} \mathbb{1}_{\{k+l \leq n\}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} \sum_{m=0}^n \mathbb{1}_{\{k+l=m\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} \mathbb{1}_{\{k+l=m\}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l \mathbb{1}_{\{k+l=m\}} \right) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right) x^m. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right) x^m = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l x^{k+l} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k x^k \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{N}_0} b_l x^l \right) = f(x)g(x),$$

wobei alle vorkommenden Reihen absolut konvergieren, und der Beweis ist abgeschlossen.

Aufgabe 4

Wir definieren die Folgen $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ als $b_k := \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n a_n$ und $c_k := \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n$. Zunächst beobachten wir, dass b_k monoton fallend ist, denn

$$b_{k+1} = b_k + a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq b_k,$$

was aus der Monotonie von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und daher aus $a_{2k+2} \leq a_{2k+1}$ folgt. Analog zeigt man, dass $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ monoton steigt. Des Weiteren sehen wir, dass

$$a_0 = b_0 \geq b_k \geq b_k - a_{2k+1} = c_k \geq c_0 = a_0 - a_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit sind also die Folgen $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ beide monoton und beschränkt. Nach dem Beweis der 2. Aufgabe konvergieren dann beide Folgen in $\mathbb{R}$ und der jeweilige Grenzwert $b := \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ und $c := \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ existiert. Zudem gilt

$$|b_k - c_k| = |a_{2k+1}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

weswegen $b = c$. Doch damit konvergiert auch die Folge $(d_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gegen b , definiert als $d_{2k} = b_k$ und $d_{2k+1} = c_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ – also $d_k = \sum_{n=0}^k (-1)^n a_n$, was die zu zeigende Konvergenz ergibt. Die behaupteten Ungleichungen gelten mit der Monotonie von $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und da $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $c = \sup\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach dem Beweis der 2. Aufgabe.

Aufgabe 5

Wir zeigen zuerst den Hinweis. Sei $\lambda > 0, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\exp(\lambda n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^j}{j!} \geq \frac{(\lambda n)^{k+1}}{(k+1)!},$$

woraus der Hinweis folgt. Hiermit erhalten wir

$$\frac{n^k}{\exp(\lambda n)} \leq \frac{1}{n} \lambda^{-k-1} (k+1)! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Aufgabe 6

Seien $a, b \in \mathbb{C}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

- a): Mit der Notation von Aufgabe 4 von Blatt 5 und unter Verwendung von Aufgabe 4e) von Blatt 5 ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b) \rangle &= \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\mathcal{F}(a)_l} \mathcal{F}(b)_l = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \overline{\omega_n^{lk}} a_k \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_p \omega_n^{lp} b_p \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} \sum_{p=0}^{n-1} b_p \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{lk} \overline{\omega_n^{lp}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} \sum_{p=0}^{n-1} b_p n \delta_{p,k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} b_k. \end{aligned} \tag{1}$$

□

b): Der Beweis dieser Teilaufgabe verläuft sehr ähnlich zu dem der letzten. Wir verwenden wieder Notation und Ergebnis von Aufgabe 4e) von Blatt 5 und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \hat{a}_k &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{kp}} a_p = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \overline{\omega_n^{kp}} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} a_p \frac{1}{n} n \delta_{pl} = a_l.
\end{aligned} \tag{2}$$

□