

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt mit übereinstimmenden Limes superior und Limes inferior. Wir zeigen zunächst zwei Lemmata, dann folgt die Hauptaussage mit einer kurzen Rechnung.

Lemma 1. *Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, deren Limes inferior existiert, dann gilt*

$$\forall \delta > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m : \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k - b_n \leq \delta.$$

Beweis des Lemmas: Sei $\delta > 0$. Nehme für einen Widerspruch an, dass

$$\forall m > 0 \exists n > m : \sup_{g \in \mathbb{N}} \inf_{c \geq g} b_c - b_n > \delta \quad (1)$$

gilt. Man sieht unter Verwendung des Hinweises, dass dies das Gegenteil der zu zeigenden Aussage ist. Wir definieren die folgende Menge

$$I := \{m \in \mathbb{N} \mid \sup_{g \in \mathbb{N}} \inf_{c \geq g} b_c > \delta + b_m\}, \quad (2)$$

dann gilt nach der Annahme offenbar, dass diese unendlich viele Elemente hat. Das bedeutet aber insbesondere, dass

$$\forall d \in \mathbb{N} : \sup_{g \in \mathbb{N}} \inf_{c \geq g} b_c > \delta + \inf_{e \geq d} b_e \quad (3)$$

gilt, was die Gültigkeit von

$$\sup_{g \in \mathbb{N}} \inf_{c \geq g} b_c \geq \delta + \sup_{d \in \mathbb{N}} \inf_{e \geq d} b_e \quad (4)$$

impliziert. Die Ungleichung (4) steht aber offenbar im Widerspruch zu $\delta > 0$, also gilt das Lemma.

Lemma 2. *Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, deren Limes superior existiert, dann gilt*

$$\forall \delta > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m : b_n - \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k \leq \delta.$$

Beweis des Lemmas: Dieser Beweis geht analog zum letzten. Sei $\delta > 0$. Nehme für einen Widerspruch an, dass

$$\forall m > 0 \exists n > m : b_n - \inf_{g \in \mathbb{N}} \sup_{c \geq g} b_c > \delta \quad (5)$$

gilt. Man sieht unter Verwendung des Hinweises, dass dies das Gegenteil der zu zeigenden Aussage ist. Wir definieren die folgende Menge

$$I := \{m \in \mathbb{N} \mid b_m > \delta + \inf_{g \in \mathbb{N}} \sup_{c \geq g} b_c\}, \quad (6)$$

dann gilt nach der Annahme offenbar, dass diese unendlich viele Elemente hat. Das bedeutet aber insbesondere, dass

$$\forall d \in \mathbb{N} : \sup_{e \geq d} b_e > \delta + \inf_{g \in \mathbb{N}} \sup_{c \geq g} b_c \quad (7)$$

gilt, was die Gültigkeit von

$$\inf_{d \in \mathbb{N}} \sup_{e \geq d} b_e \geq \delta + \inf_{g \in \mathbb{N}} \sup_{c \geq g} b_c \quad (8)$$

impliziert. Die Ungleichung (8) steht aber offenbar im Widerspruch zu $\delta > 0$, also gilt auch dieses Lemma.

Nun zur Aufgabe. Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ihren Limesinferior konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Verwende die Lemmata 1 und 2 jeweils mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ und nenne die beiden in den Lemmata genannten Variablen m_1 und m_2 . Sei $N \geq \max\{m_1, m_2\}$, dann gilt

$$a_N - \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k = a_N - \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k = a_N - \inf_{b \in \mathbb{N}} \sup_{c \geq b} a_c \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (9)$$

und

$$-(a_N - \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k - a_N = \sup_{b \in \mathbb{N}} \inf_{c \geq b} a_c - a_N \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (10)$$

Damit gilt insgesamt $|a_N - \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k| < \varepsilon$.

Aufgabe 2

Es ist zu zeigen, dass $|n^k a^n - 0| = |n^k| \cdot |a^n| = n^k |a|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Daher genügt es zu zeigen, dass $n^k r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$ (der Fall $r = 0$ und damit $a = 0$ ist klar). Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten ab nun den Kehrwert und zeigen $n^{-k}(l+1)^n > \frac{1}{\varepsilon}$ für $l = 1/r - 1 > 0$. Sei $n > \max\{2k+2, \frac{(l/2)^{k+1}}{\varepsilon \cdot (k+1)!}\}$. Mit der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned} \frac{(1+l)^n}{n^k} &= n^{-k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} l^j \geq n^{-k} \binom{n}{k+1} l^{k+1} \\ &= \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k-1)}{n^k} \\ &= \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \cdot n \cdot \prod_{j=1}^{k+1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\ &\stackrel{n \geq 2(k+1)}{\geq} \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \cdot n \cdot 2^{-k-1} = \frac{(\frac{l}{2})^{k+1}}{(k+1)!} \cdot n > \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei im ersten Schritt die nur nichtnegative Summanden enthaltende Summe durch den $(k+1)$ -ten Term nach unten abgeschätzt wurde. Damit ist also $n^k r^n = n^k (l+1)^{-n} < \varepsilon$, was die Behauptung zeigt.

Alternativer Beweis:

Wir zeigen wieder $n^k r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$, diesmal jedoch via Induktion über k .

Hierfür machen wir einen doppelten Induktionsanfang. Für $k = 0$ ist zu zeigen, dass $r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dies gilt nach einem Beispiel aus der Vorlesung. Betrachte nun $k = 1$ und beliebiges $\varepsilon > 0$. Setze $l := 1/r > 1$ und sei weiter $n > \frac{1}{\varepsilon(\sqrt{l}-1)^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{n}{l^n} &= \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{l}-1+n)^n} \right)^2 \stackrel{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leq} \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{l}-1)n+1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{(\sqrt{l}-1)\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{(\sqrt{l}-1)\sqrt{n}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\sqrt{l}-1)^2 \cdot n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sei nun $k \geq 1$ und gelte die Aussage für alle $0 < r < 1$ und alle $0 \leq j \leq k$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$n^{k+1}r^n = (n^k\sqrt{r^n})(n\sqrt{r^n}) \quad (12)$$

und nach Induktionsvoraussetzung gibt es $m_1 \in \mathbb{N}_0$ und nach dem Induktionsanfang für $k = 1$ gibt es $m_2 \in \mathbb{N}_0$, sodass $n^k\sqrt{r^n} < \sqrt{\varepsilon}$ für alle $n > m_1$ und $n\sqrt{r^n} < \sqrt{\varepsilon}$ für alle $n > m_2$. Hierbei wird benutzt, dass die Induktionsvoraussetzung auch für $0 < \sqrt{r} < 1$ angewendet werden kann. Für alle $n > \max\{m_1, m_2\}$ gilt somit also $n^{k+1}r^n < \varepsilon$.

Bemerkung: Statt eines doppelten Induktionsanfangs kann auch mit einer Hilfsbehauptung gezeigt werden, dass $n\sqrt{r^n}$ durch $s \in \mathbb{R}$ beschränkt ist (dieser Beweis ist einfacher als die Konvergenz gegen Null, vgl. den nächsten Alternativbeweis). In (12) wird dann mit der Induktionsvoraussetzung n so groß gewählt, dass $n^k\sqrt{r^n} < \varepsilon/s$, was ebenfalls zum Ziel führt.

Alternativer Beweis:

Wir zeigen zuerst als Hilfsbehauptung, dass $1 \leq \frac{(n+1)^k}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$ via Induktion über k . Für $k = 0$ ist $|(n+1)/n - 1| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und damit die Aussage klar. Sei nun $k \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Nach IV können wir m_1 so wählen, dass $(n+1)^k/n^k < 1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{4}$ für alle $n > m_1$ und mit $\bar{\varepsilon} := \min\{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\}$. Sei nun $n > \max\{m_1, \frac{4}{\bar{\varepsilon}}\}$. Dann ist

$$\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{4}\right)^2 = 1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{16} < 1 + \varepsilon$$

was die Hilfsbehauptung zeigt. Sei nun $\delta := (1-r)/2$. Wähle n_0 so groß, dass $(n+1)^k/n^k < 1 + \delta/r$. Dann ist für $n > n_0$

$$(n+1)^k r^n = r \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k n^k r^n < (r+\delta)n^k r^n < (r+\delta)^{n-n_0} n_0^k r^{n_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da $|r+\delta| < 1$ und $n_0^k r^{n_0}$ ein von n unabhängiger reeller Wert ist.

Aufgabe 3

unächst beweisen wir die Aussage aus dem Hinweis per Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für den Induktionsanfang bemerken wir, dass $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. Nun nehmen wir als

Induktionsvoraussetzung an, dass $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und führen den Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$) folgendermaßen durch:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{IV}{=} \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + (n^2 + 2n + 1) = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n}{6},$$

was die Induktion abschließt.

Mit dem Hinweis erhalten wir

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3} - \frac{1}{3} \right| = \left| -\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

wobei die Dreiecksungleichung, $n^2 \geq n$ und $1/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ verwendet wurde.

Aufgabe 4

(a) Es ist

$$\frac{\Delta_n^2}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} - \sqrt{a} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \Delta_{n+1}.$$

(b) Per Konstruktion ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, womit Δ_{n+1} für alle $n \in \mathbb{N}_0$ als Quotient eines nichtnegativen und eines positiven Ausdrucks selbst nichtnegativ ist.

Weiterhin gilt

$$0 \leq \frac{\Delta_n}{x_n} = 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \leq 1, \quad (13)$$

was

$$\Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n}{2} \cdot \frac{\Delta_n}{x_n} \leq \frac{\Delta_n}{2}$$

impliziert. Aus (13) folgt des Weiteren $\sqrt{a} \leq x_n$, was mit (a) direkt $\Delta_{n+1} \leq \Delta_n^2/(2\sqrt{a})$ ergibt. Es sei vermerkt, dass alle Schlüsse auch für $n = 0$ gelten, falls $\Delta_0 \geq 0$.

(c) Für $n \geq 2$ gilt

$$|x_n - \sqrt{a}| = x_n - \sqrt{a} = \Delta_n \leq \frac{1}{2}\Delta_{n-1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\Delta_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da Δ_1 ein nur von a und b abhängiger Wert ist.

(d) Mit der Abschätzung aus (b) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq \frac{\Delta_{n-1}^2}{2\sqrt{2}} \leq \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{2^j} \Delta_0^n = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{\sum_{j=0}^{n-1} 2^j} \Delta_0^n \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{2^n - 1} \Delta_0^n \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{2^n - 1}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist beschränkt durch 10^{-6} falls $2^n - 1 > \frac{\log(10^{-6})}{\log((2\sqrt{2})^{-1})} = \frac{12 \log 10}{\log 8}$, was für $n \geq 4$ der Fall ist. Berechnungen ergeben dafür den Wert $x_4 = 1,41421356237469$.

Aufgabe 5

Wir folgen dem Tipp und benutzen die Formeln aus dem Skript. Es gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^m k^2 2^{-k} = f\left(m, 2, \frac{1}{2}\right), \quad (14)$$

wobei f für die relevanten Argumente wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} f\left(m, 0, \frac{1}{2}\right) &:= 2 - 2^{-m} \\ f\left(m, n, \frac{1}{2}\right) &:= -2(m+1)^n 2^{-(m+1)} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} f\left(m, l, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Es ergibt sich damit also, dass

$$\begin{aligned} f\left(m, 1, \frac{1}{2}\right) &:= 2 - (m+2)2^{-m} \text{ und} \\ f\left(m, 2, \frac{1}{2}\right) &:= 6 - (m^2 + 4m + 6)2^{-m} \end{aligned} \quad (16)$$

gilt. Um den Grenzwert zu bestimmen (und dessen Existenz sicherzustellen) verwenden wir die Rechenregeln für Limiten und Aufgabe 2.

Es gilt insgesamt

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 2^{-k} = \lim_{m \rightarrow \infty} (6 - (m^2 + 4m + 6)2^{-m}) = 6. \quad (17)$$

Aufgabe 6

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definiert wie in der Aufgabenstellung. Wir stellen zunächst einmal fest, dass für alle $n \geq 1$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}a_n - a_n = -\frac{2}{5}(a_n - a_{n-1}) \quad (18)$$

gilt. Hieraus folgt für $N > 1$ (mit einem sehr leichten Induktionsbeweis) die Gültigkeit von

$$a_N = \left(-\frac{2}{5}\right)^{N-1} (a_1 - a_0) + a_{N-1}. \quad (19)$$

Dies impliziert jedoch (wieder mit einem sehr leichten Induktionsbeweis), dass

$$a_N = \sum_{k=1}^{N-1} \left(-\frac{2}{5}\right)^k (a_1 - a_0) + a_1 \quad (20)$$

gilt. Da aus der Vorlesung bekannt ist, dass die geometrische Reihe konvergiert und gegen welchen Wert sie konvergiert ergibt sich, dass die betrachtete Folge konvergiert und zwar gegen

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} a_N &= \left(-\frac{2}{5}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k (a_1 - a_0) + a_1 = \left(-\frac{2}{5}\right) \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)} (a_1 - a_0) + a_1 \\ &= \frac{-2}{7}(a_1 - a_0) + a_1 = \frac{5}{7}a_1 + \frac{2}{7}a_0. \end{aligned} \quad (21)$$