

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

- (a) Es ist
- b
- ein Häufungspunkt von
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m > n : a_m \in U_\varepsilon(b).$$

- (b) Die komplexe Zahl
- $z = 1 + i$
- hat die Polarkoordinaten (PK)
- $(\sqrt{2}, \pi/4)$
- . Damit hat
- z^n
- die PK
- $(2^{n/2}, (\pi n)/4)$
- und demnach
- a_n
- die PK

$$\left(\frac{1+n}{n}, \frac{\pi n}{4} \right).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ von der Form, dass $n = 8k + 2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die φ -Koordinate von a_n genau $(8k+2)\pi/4 = 2k\pi + \pi/2 = \pi/2$ und somit $a_n = \frac{(1+n)}{n}i$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wähle $m > \max\{1/\varepsilon, n\}$ von der Form $m = 8k+2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $a_m = \frac{(1+m)}{m}i$ und

$$|a_m - i| = |i/m| = 1/m < \varepsilon.$$

Es ist also i ein Häufungspunkt von a_n .

Aufgabe 2

Wir definieren zur Abkürzung $A_n := \{a_m \mid m \geq n\}$. Falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, so ist A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt und damit auch $\inf_{m \in \mathbb{N}} \sup A_m = \infty$. Sei also $\mathbb{R} \ni \bar{a} := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Wir zeigen in zwei Schritten ‘ $\leq$ ’ und ‘ $\geq$ ’.

‘ $\leq$ ’ Sei $m \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass $\bar{a} - \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup A_m = \varepsilon > 0$. Da $A_{m_1} \supseteq A_{m_2}$ für alle $m_1 \leq m_2$ ist $\sup A_m$ monoton fallend in m und es gibt ein $M \in \mathbb{N}$, sodass $\sup A_m \leq \bar{a} - \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m > M$.

Da allerdings $\bar{a}$ ein Häufungspunkt ist, gibt es ebenso ein $n > M$, sodass $\sup A_n > \bar{a} - \frac{\varepsilon}{2}$, was einen Widerspruch darstellt.

‘ $\geq$ ’ Sei $a' = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup A_m$ und nehme an, dass $\bar{a} < a'$. Definiere $\varepsilon := \frac{a' - \bar{a}}{2}$. Sei nun

$$\mathcal{I} := \{n \in \mathbb{N} \mid a' - \varepsilon \leq a_n\}.$$

Nehme zuerst an, dass $\mathcal{I}$ unendlich viele Elemente enthält. Dies impliziert, dass $(a_j)_{j \in \mathcal{I}}$ als Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach einer Variante des Satzes von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ besitzt, welcher nach Definition größer als $\bar{a}$ sein muss, was uns zu einem Widerspruch führt.

Nehme also nun an, dass $|\mathcal{I}| < \infty$. Sei $N = \max \mathcal{I}$. Dann ist jedoch $a_m < a' - \varepsilon$ für alle $m > N$ und insbesondere $\sup A_m \leq a' - \varepsilon$ für alle $m > N$. Damit muss auch $\inf_{m \in \mathbb{N}} \sup A_m \leq a' - \varepsilon$, was erneut einen Widerspruch bedeutet.

Aufgabe 3

Wir finden rekursiv eine absteigende Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (d.h. $K_{n+1} \subseteq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$) an kompakten Mengen, sodass $\emptyset \neq K_n \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x_1 \in U_1$ und $\varepsilon_1 > 0$, sodass $U_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq U_1$ – dies ist möglich, da U_1 nichtleer und offen ist. Definiere nun $K_1 := \overline{U_{\varepsilon_1/2}(x_1)}$, dann ist K_1 per Definition abgeschlossen, beschränkt und in U_1 enthalten. Nehme nun für $n > 1$ an, $K_1 \supseteq \dots \supseteq K_{n-1}$ sind schon definiert. Da U_n dicht in $\mathbb{R}$ ist, muss

$$K_{n-1} \cap U_n \supseteq U_{\varepsilon_{n-1}/2}(x_{n-1}) \cap U_n \neq \emptyset.$$

Wähle also x_n als Element aus dem Inneren dieses Schnitts (der Schnitt der zwei offenen Mengen $U_{\varepsilon_{n-1}/2}(x_{n-1})$ und U_n ist wieder offen, womit jeder enthaltene Punkt ein innerer Punkt ist), was uns die Existenz von $\varepsilon_n > 0$ garantiert, sodass $U_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq K_{n-1} \cap U_n$. Dann ist $K_n := \overline{U_{\varepsilon_n/2}(x_n)}$ wieder eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften. Mit Korollar 2.29 aus dem Skript gilt nun, dass der Durchschnitt der K_n nichtleer ist, also

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n,$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 4

Sei $A \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

“ $\Rightarrow$ ”: Sei A offen. Die Menge $k[A]$ ist nach Definition offen, wenn für alle $x \in \mathbb{C} \cap k[A]$ gilt, dass sie innere Punkte sind und falls $\infty \in k[A]$ ist, so müssen alle genügen großen komplexen Zahlen Elemente von $k[A]$ sein.

- Sei $\infty \in A$. Zeige $k(\infty) = 0$ ist ein innerer Punkt von $k[A]$: Sei $r > 0$ sodass $\forall x \in \mathbb{C} : |x| > r \Rightarrow x \in A$ (solch ein r existiert, weil $\infty \in A$ und A offen ist). Dann gilt $U_{\frac{1}{r}}(0) \subseteq k[A]$, denn für $z \in U_{\frac{1}{r}}(0) \setminus \{0\}$ ist

$$z = \frac{1}{\frac{1}{z}} = k\left(\frac{1}{z}\right). \quad (1)$$

Weil $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \frac{1}{r} = r$ gilt, ist $\frac{1}{z} \in A$.

- Sei $x \in A \setminus \{0, \infty\}$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(x) \subseteq A$. Wir zeigen $U_{\frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)}}(k(x)) \subseteq k[U_\delta(x)] \subseteq k[A]$. Sei $\left(\frac{1}{x} + z\right) \in U_{\frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)}}(k(x))$, dann gilt $\frac{1}{x} + z = \frac{1}{1+zx} = k\left(\frac{x}{1+zx}\right)$. Der relevante Abstand ist dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{1+zx} - x \right| &= \left| \frac{x - x - zx^2}{1+zx} \right| = \frac{|z||x|^2}{|1+zx|} \stackrel{\square}{\leq} \frac{|z||x|^2}{1-|zx|} \\ &< \frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)} \frac{|x|^2}{1 - \frac{\delta}{(|x|+\delta)}} = \frac{|x|\delta}{|x|+\delta-\delta} = \delta \end{aligned} \quad (2)$$

Bei der mit $\square$ markierten Ungleichung muss man sich keine Sorgen machen ob durch 0 geteilt wird, denn es gilt

$$1 - |zx| > 1 - \frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)}|x| = \frac{|x|+\delta-\delta}{|x|+\delta} = \frac{|x|}{|x|+\delta} > 0. \quad (3)$$

- Es gilt also $k[A] \cap \mathbb{C}$ ist offen in $\mathbb{C}$. Falls $0 \in A$, also $\infty \in k[A]$ muss noch gezeigt werden, dass alle im Betrage genügend großen komplexen Zahlen in $k[A]$ sind. Nehme an, $0 \in A$ gälte. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(0) \subseteq A$ gilt. Sei $z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann folgt

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} < \varepsilon \text{ und } k\left(\frac{1}{z}\right) = z, \quad (4)$$

also ist $z \in k[A]$. Also ist $k[A]$ offen. $\square$

“ $\Leftarrow$ ”: Nehme an, $k[A]$ ist offen. Es ist zu zeigen, dass A offen ist. Für jedes $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt $k(k(z)) = z$, die Abbildung k ist also sein eigenes Inverses. Es gilt daher

$$\begin{aligned} k[A] &= \{k(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid z \in A\} = \{k^{-1}(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid z \in A\} \\ &= \{y \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid k(y) \in A\} = k^{-1}[A]. \end{aligned} \quad (5)$$

Also ist $k^{-1}[A]$ offen. Nun wissen wir aus dem ersten Teil des Beweises, dass die Bildmengen offener Mengen offen sind. Also ist auch $k[k^{-1}[A]] = A$ offen.

Aufgabe 5

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $(C_j)_{j \in I}$ von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- Sei $(C_j)_{j \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Dann muss ein $k \in I$ existieren, sodass $0 \in C_k$. Da C_k offen ist, existiert des Weiteren ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subseteq C_k$. Definiere nun

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}, m > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \quad \text{sowie} \\ M_2 &:= M \setminus M_1 = \left\{ \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $M_1 \subseteq U_\varepsilon(0) \subseteq C_k$ und $|M_2| < \infty$, es ist also M_2 eine Menge, die nur endlich viele Elemente enthält. Damit gibt es eine Index-Menge $E \subseteq I$ mit $|E| = |M_2|$, sodass $(C_j)_{j \in E}$ eine (endliche) Überdeckung von M_2 ist, denn: Da M überdeckt ist, muss auch M_2 überdeckt sein und so existiert für jedes Element x in M_2 mindestens ein Index $j(x)$, sodass $x \in C_{j(x)}$. Wir können also $E = \{j(x) \mid x \in M_2\}$ wählen.

Doch damit ist $(C_j)_{j \in (E \cup \{k\})}$ eine endliche Überdeckung von M , was die Aufgabe löst.

Aufgabe 6

Wir setzen $C_0 :=]\frac{\sqrt{2}}{2}, 2[$ und $C_n :=]-1, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1/n[$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Überdeckung mit den gesuchten Eigenschaften:

- Per Definition ist C_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ offen.

- Da $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt mit $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$, dass $[0, 1] \cap C = [0, 1] \setminus \{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ und insbesondere $\mathbb{Q} \subseteq [0, 1] \cap C$.
- Nehme nun an, es gäbe eine endliche Menge $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}_0$, sodass $(C_j)_{j \in \mathcal{I}}$ ebenfalls eine Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist. Sei $m = \max \mathcal{I}$. Wähle $\varepsilon := \frac{1}{4m}$ und $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2m}$. Per Konstruktion gilt dann

$$\left(\bigcup_{j \in \mathcal{I}} C_j \right) \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset.$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, enthält $U_\varepsilon(x)$ jedoch auch rationale Zahlen. Damit kann $(C_j)_{j \in \mathcal{I}}$ keine Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gewesen sein – ein Widerspruch.

Bemerkung: Statt $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hätte auch eine beliebige andere irrationale Zahl in $[0, 1]$ gewählt werden können.