

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

- b) Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei H wie in der Aufgabenstellung definiert. Um zu zeigen, dass H offen ist, finden wir für ein beliebiges Element von H eine offene Umgebung welche in H enthalten ist. Sei also $z \in H$ und $\alpha = \frac{\operatorname{Re}(\bar{w}z) - a}{2|w|} > 0$. Dann gilt für jedes $x \in U_\alpha(z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{w}x) &= \operatorname{Re}(\bar{w}(x-z)) + \operatorname{Re}(\bar{w}z) \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl}}{\geq} \operatorname{Re}(\bar{w}z) - |w||x-z| \\ &\geq \operatorname{Re}(\bar{w}z) - |w|\alpha \geq \operatorname{Re}(\bar{w}z) + \frac{a}{2} - \frac{\operatorname{Re}(\bar{w}z)}{2} = \frac{a + \operatorname{Re}(\bar{w}z)}{2} > a \end{aligned} \quad (1)$$

Also ist $x \in H$ und damit auch $U_\alpha(z) \subseteq H$. □

Aufgabe 2

Es sei $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und S^1 der Einheitskreis. Wir zeigen

$$\partial B = S^1 \quad (2)$$

Wir zeigen zuerst “ $\supseteq$ ”. Sei $y \in S^1$ und $\varepsilon > 0$. Wir können für ein $\phi \in [0, 2\pi[$ den Punkt y als $y = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ schreiben. Falls $\varepsilon \geq 1$ ist der Ursprung in $U_\varepsilon(y)$ und B enthalten. Für $\varepsilon < 1$ definieren wir den Punkt $z := \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(\phi) + i \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(\phi)$. Dieser ist ein Element von B und der ε -Umgebung $U_\varepsilon(y)$ von y , denn es gilt

$$|z| = \left|1 - \frac{\varepsilon}{2}\right| < 1 \quad (3)$$

und

$$|y - z| = \left| \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(\phi) + i \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(\phi) \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (4)$$

Wobei wir den Betrag einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten abgelesen haben. Es gilt für jede komplexe Zahl w mit den Polarkoordinaten (m, ϕ) mit $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0, 2\pi[$:

$$w = m \cos \phi + mi \sin \phi \wedge |w| = m. \quad (5)$$

Es gilt also $U_\varepsilon(y) \cap B \neq \emptyset$. Sei $x := \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(\phi) + i \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(\phi)$. Es gilt $x \in U_\varepsilon(y) \cap (\mathbb{C} \setminus B)$, denn es gilt

$$|x| = \left| \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(\phi) + i \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(\phi) \right| = \left|1 + \frac{\varepsilon}{2}\right| > 1 \quad (6)$$

und

$$|x - y| = \left| \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \cos(\phi) + i \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \sin(\phi) \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (7)$$

Nun zum zweiten Teil “ $\subseteq$ ”: Sei $y \in \partial B$. Der Fall $y = 0$ kann ausgeschlossen werden, da $B = U_1(0)$ gilt und daher 0 ein innerer Punkt von B ist. Es ist zu zeigen, dass $y \in S^1$ gilt. Nach dem Skript lässt sich y wie folgt umschreiben. Es gibt $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0, 2\pi[$ so, dass $y = r \cos(\phi) + ir \sin(\phi)$ gilt. Wir zeigen nun $r = 1$ durch Fallunterscheidung.

Fall 1 $r > 1$: Weil $y \in \partial B$ ist, gilt $U_{r-1}(y) \cap B \neq \emptyset$. Wähle also $x \in U_{r-1}(y) \cap B$; x lässt sich ebenfalls in Polarform schreiben als $x = k \cos(\alpha) + ik \sin(\alpha)$ mit $k \in [0, 1]$, $\alpha \in [0, 2\pi[$. Dann gilt

$$\begin{aligned} r - 1 &> |y - x| = \sqrt{(r \cos \phi - k \cos \alpha)^2 + (r \sin \phi - k \sin \alpha)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + k^2 - 2rk \cos \phi \cos \alpha - 2rk \sin \phi \sin \alpha} = \sqrt{r^2 + k^2 - 2rk \cos(\alpha - \phi)} \\ &\geq \sqrt{r^2 + k^2 - 2kr} = |r - k| = r - k = r - 1 + 1 - k > r - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Also gilt $r - 1 > r - 1$, was ein Widerspruch ist.

Fall 2 $r < 1$: Weil $y \in \partial B$ ist, gilt $U_{1-r}(y) \cap \mathbb{C} \setminus B \neq \emptyset$. Wähle also $x \in U_{1-r}(y) \cap \mathbb{C} \setminus B$; x lässt sich ebenfalls in Polarform schreiben als $x = k \cos(\alpha) + ik \sin(\alpha)$ mit $k \in]1, \infty[$, $\alpha \in [0, 2\pi[$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 - r &> |y - x| = \sqrt{(r \cos \phi - k \cos \alpha)^2 + (r \sin \phi - k \sin \alpha)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + k^2 - 2rk \cos \phi \cos \alpha - 2rk \sin \phi \sin \alpha} = \sqrt{r^2 + k^2 - 2rk \cos(\alpha - \phi)} \\ &\geq \sqrt{r^2 + k^2 - 2kr} = |r - k| = k - r = k - 1 + 1 - r > 1 - r \end{aligned} \quad (9)$$

Also gilt $1 - r > 1 - r$, was ein Widerspruch ist.

Da Sowohl $r < 1$ als auch $r > 1$ zu einem Widerspruch führen muss also $r = 1$ gelten. Dies bedeutet $y \in S^1$.

Aufgabe 3

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $A = \emptyset \vee A = \mathbb{R}$ gilt. Wir beweisen dies mit Widerspruch, nehme also an $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{R}$. Aus der Offenheit von A folgt $A \cap \partial A = \emptyset$ und aus der Geschlossenheit von A folgt $A \cap \partial A = \partial A$. Die Menge A hat also keine Randpunkte. Sei $a \in A$ und $b \in \mathbb{R} \setminus A$. Es gilt daher entweder $b \in \partial A$ oder $b \in (\mathbb{R} \setminus A)^\circ$. Weil A keinen Rand hat, muss b also im Inneren von $\mathbb{R} \setminus A$ sein. Die Menge $\{k > 0 \mid U_k(b) \cap A = \emptyset\}$ ist also nicht leer und sie ist beschränkt, denn $a \in U_m(b) \cap A$ für alle $m > |a - b|$. Wir definieren

$$l := \sup\{k > 0 \mid U_k(b) \cap A = \emptyset\}. \quad (10)$$

Nach Konstruktion gilt dann für jedes $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &(U_\delta(b + l) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\delta(b + l) \cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset) \\ &\vee (U_\delta(b - l) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\delta(b - l) \cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset). \end{aligned} \quad (11)$$

Daher gilt auch $\{b+l, b-l\} \cap \partial A \neq \emptyset$. Dies steht allerdings im Widerspruch zu $\partial A = \emptyset$.

Aufgabe 4

Sei M wie in der Aufgabenstellung, und $x \in \overline{M}$. Also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset. \quad (12)$$

Es ist noch zu zeigen, dass $x \in M$ ist. Nehme für einen Widerspruch an, dass $x \notin M$ und definiere

$$\vartheta := \{m \in M \mid m > x\}. \quad (13)$$

Wir gehen nun mehrere Fälle bezüglich der Menge ϑ durch:

Fall 1, $\vartheta = M$: In diesem Fall gilt $x < 0$, aufgrund von $\inf M = 0$ (trivialer Beweis mit archimedischem Axiom) und $x \notin M$. Dann folgt direkt: $U_{|x|}(x) \cap M = \emptyset$, was im Widerspruch zu (12) steht.

Fall 2, $\vartheta = \emptyset$: In diesem Fall ist $x > 1$, also gilt auch $U_{|x-1|}(x) \cap M = \emptyset$, was wiederum im Widerspruch zu (12) steht.

Fall 3, $|\vartheta| \in \mathbb{N}$: In diesem Fall existiert $\min \vartheta$. Die Menge der Elemente aus M , die kleiner als x ist, lässt sich so schreiben:

$$\begin{aligned} P := M \setminus \vartheta &= \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \frac{1}{n} < \min \vartheta \right\} \cup \{0\} \\ &= \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{\min \vartheta}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Man sieht direkt das Maximum der Menge: $\max P = \frac{1}{1 + \frac{1}{\min \vartheta}}$. Nach Konstruktion gilt $\max P < x$ und damit finden wir den Widerspruch

$$U_{\min\{x - \max P, \min \vartheta - x\}}(x) \cap M = \emptyset. \quad (15)$$

Aufgabe 5

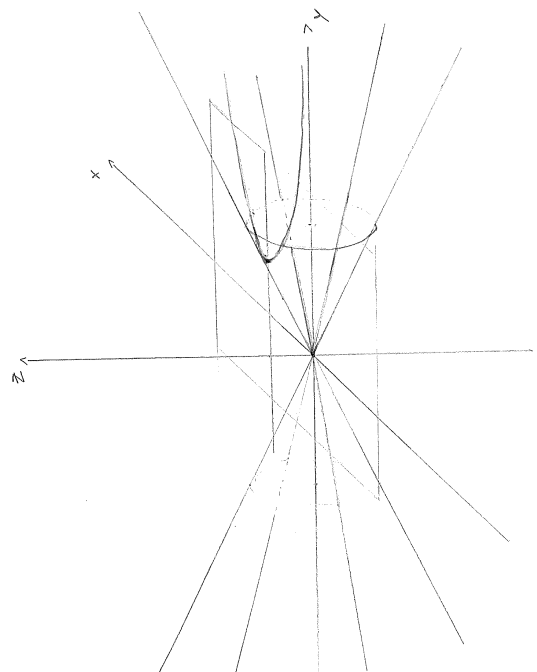
- (b) Wir zeigen zuerst die Surjektivität. Sei dafür $(x, y, z) \in K$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $z = 0$. Dann muss $0 \neq |x| = |y|$ gelten und damit $0 \neq x = \pm y$. Die beiden zugehörigen Geraden in G sind genau $(1, \pm 1, 0)$ und damit die Bilder von $\infty_{\pm}$.

Wir wenden uns nun dem Fall zu, dass $z \neq 0$. Dann liegen (x, y, z) und $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ auf derselben Gerade aus G . Das heißt die Gerade $\mathbb{R}(x, y, z)$ hat den Urbildpunkt $(x/z, y/z) \in H$ (die Zugehörigkeit zu H lässt sich leicht überprüfen).

Wir zeigen nun die Injektivität von f und nehmen dafür zwei Punkte P, P' aus $H \cup \{\infty_{\pm}\}$ mit $f(P) = f(P')$. Falls $P = \infty_{\pm}$, so ist $f(P)$ eine Gerade in der xy -Ebene, kann also insbesondere nicht von der Form $\mathbb{R}(x, y, 1)$ sein. Damit ist auch $f(P') = \mathbb{R}(1, \pm 1, 0)$ und folglich $P = P'$.

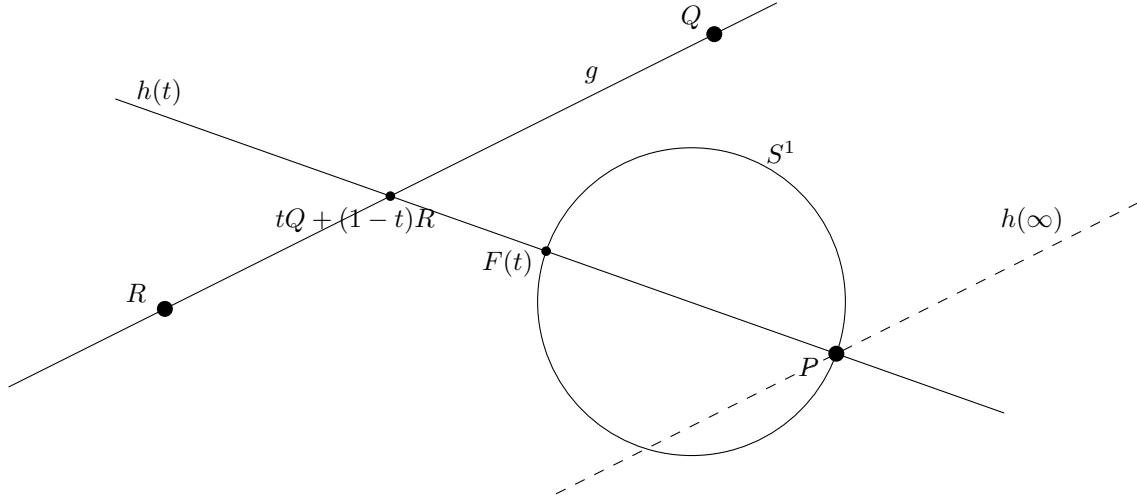
Wir können also annehmen, dass $P \neq \pm\infty \neq P'$ und die beiden Punkte die Form $P = (x, y), P' = (x', y')$ besitzen. Dann ist also $\mathbb{R}(x, y, 1) = \mathbb{R}(x', y', 1)$ und insbesondere $(x, y, 1) = (x', y', 1)$, also $P = P'$.

(a)



Aufgabe 6

Wir beginnen mit einer Skizze.



Sei $t \in \mathbb{R}$. Zur Übersichtlichkeit schreiben wir $(G_1(t), G_2(t)) = G(t) = tQ + (1-t)P$, wobei $Q = (q_1, q_2)$, etc. Die Gerade $h(t)$ können wir beschreiben als

$$h(t) = \{sG(t) + (1-s)P \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Der Punkt $F(t)$ liegt auf $h(t)$ und erfüllt $|F(t)|^2 = 1$. Die beiden Schnittpunkte mit S^1 ergeben sich, wenn s die folgende Gleichung erfüllt.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 (sg_i(t) + (1-s)p_i)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^2 s^2 g_i(t)^2 + s(1-s)g_i(t)p_i + (1-2s+s^2)p_i^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^2 s^2 (g_i(t)^2 - g_i(t)p_i + p_i^2) + s(g_i(t)p_i - 2p_i^2) + p_i^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^2 s^2 (g_i(t)^2 - g_i(t)p_i + p_i^2) + s(g_i(t)p_i - 2p_i^2) = 0, \end{aligned}$$

da $|P| = 1$. Als nächstes beobachten wir, dass wir für $s = 0$ genau den Punkt P erhalten. Wir sind jedoch an dem zweiten Schnittpunkt mit S^1 interessiert, können also $s \neq 0$ annehmen und erhalten somit, dass $F(t)$ der von jenem s festgelegte Punkt auf $h(t)$ ist, sodass s die Gleichung

$$\sum_{i=1}^2 s(g_i(t)^2 - g_i(t)p_i + p_i^2) + (g_i(t)p_i - 2p_i^2) = 0$$

erfüllt. Dies führt zu

$$s = \frac{2 - \sum_{i=1}^2 g_i(t)p_i}{1 + \sum_{i=1}^2 g_i(t)^2 - g_i(t)p_i}$$

und daher

$$F(t) = sG(t) + (1-s)P.$$

Für $h(\infty)$ erhalten wir

$$h(\infty) = \{P + s(R - Q) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Damit ist $F(\infty)$ also jener Punkt auf $h(\infty)$, dessen zugehöriger Parameter $s \neq 0$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^2 (p_i + s(r_i - q_i))^2 = 1$$

erfüllt. Analoge Umformungen ergeben

$$s = \frac{\sum_{i=1}^2 p_i (q_i - r_i)}{\sum_{i=1}^2 (r_i - q_i)^2},$$

Einsetzen in die Geradengleichung $h(\infty)$ ergibt den Funktionswert $F(\infty)$.

Umgekehrt ist $F^{-1}(X)$ für ein $X = (x_1, x_2)$ der t -Wert, dessen zugehöriger Punkt auf QR genau der Schnittpunkt der Geraden QR mit der Geraden XP ist. Wir nehmen an, $QR \nparallel XP$, dass also die beiden Geraden nicht parallel sind (in diesem Fall setzen wir $F^{-1}(X) = \infty$).

Wir suchen also ein Tupel $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$sx_i + (1 - s)p_i = tq_i + (1 - t)r_i$$

für $i \in \{1, 2\}$. Dies ist äquivalent zu

$$s = \frac{tq_i + (1 - t)r_i - p_i}{x_i - p_i}.$$

Setzen wir diese beiden Gleichung für $i = 1, 2$ gleich und multiplizieren die Nenner auf die jeweils andere Seite, so erhalten wir

$$(x_2 - p_2)(tq_1 + (1 - t)r_1 - p_1) = (x_1 - p_1)(tq_2 + (1 - t)r_2 - p_2),$$

was aufgelöst nach t

$$F^{-1}(X) = t = \frac{(x_1 - p_1)(r_2 - p_2) - (r_1 - p_1)(x_2 - p_2)}{(q_1 - r_1)(x_2 - p_2) - (q_2 - r_2)(x_1 - p_1)}$$

ergibt. *Bemerkung:* Der Nenner ist genau dann 0, wenn RQ und PX linear abhängig, also parallel sind.