

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

- (a) • Es gilt

$$z_1 = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i.$$

- Wir sehen, dass $(1+i)^2 = 2i$, woraus $(1+i)^4 = -4$ und $(1+i)^8 = 16$ folgt. Somit gilt $z_2 = 1$.
- Es gilt

$$z_3 = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

- Mit $\tilde{z}_4 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ gilt, dass $\tilde{z}_4^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ und $\tilde{z}_4^3 = -1$. Daraus folgt insbesondere, dass

$$\tilde{z}_4^{i+3} = \tilde{z}_4^i \cdot \tilde{z}_4^3 = -\tilde{z}_4^i$$

für $i \in \{1, 2, 3\}$. Für z_4 folgt also, dass $z_4 = \tilde{z}_4 + \tilde{z}_4^2 + \tilde{z}_4^3 - \tilde{z}_4 - \tilde{z}_4^2 - \tilde{z}_4^3 = 0$.

- (b) • In Polarkoordinaten (r, φ) gilt $1 = (1, 0)$ und $i = (0, \frac{\pi}{2})$. Damit ist $\frac{1}{i}$ eine Drehstreckung der 1 mit Streckungsfaktor 1 und Drehfaktor $-\frac{\pi}{2}$. Folglich besitzt $\frac{1}{i}$ die Polardarstellung $(1, -\frac{\pi}{2})$ und es gilt $1/i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) = -i \sin(\frac{\pi}{2}) = -1$.
- Die Polardarstellung von $(1+i)$ ist $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$, also besitzt z_2 die Polardarstellung $\frac{1}{16}(\sqrt{2}^8, \frac{8}{4}\pi) = \frac{1}{16}(16, 0)$, also $z_2 = 1$.
 - Die Polardarstellung von $(1-i)$ ist $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$, also besitzt z_3 die Polardarstellung $(\sqrt{2}/\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)) = (1, \frac{1}{2}\pi)$, und damit $z_3 = i$.
 - Die Polardarstellung von $\tilde{z}_4$ ist $(1, \frac{1}{3}\pi)$, wobei eine kurze geometrische Überlegung den zweiten Wert als $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ ergibt. Damit hat $\tilde{z}_4^3$ die Polardarstellung $(1, \pi)$ und ist somit eine Spiegelung am Ursprung. Insbesondere ist damit $\tilde{z}_4^n + \tilde{z}_4^{n+3} = 0$ und $z_4 = 0$.

Aufgabe 2

- (a) Wir beobachten zuerst, dass die Aussage im Fall $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = -1 \in S^1$ wahr ist.

“ $\Rightarrow$ ” Sei $z \in S^1 \setminus \{\pm 1\}$. Dann folgt

$$f(z) = i \cdot \frac{(z+1)(\bar{z}+1)}{(z-1)(\bar{z}+1)} = i \cdot \frac{2+z+\bar{z}}{z-\bar{z}} = i \cdot \frac{2+2\operatorname{Re} z}{i2\operatorname{Im} z} = \frac{2+2\operatorname{Re} z}{2\operatorname{Im} z} \in \mathbb{R},$$

wobei verwendet wurde, dass $z\bar{z} = 1$.

“ $\Leftarrow$ ” Sei $z \neq \pm 1$. Sei nun $0 \neq f(z) \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass auch $1/f(z) \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (-i) \cdot \frac{z-1}{z+1} = (-i) \cdot \frac{|z|^2 - 1 + i2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 2\operatorname{Re} z + 1}.$$

Da der Nenner reell ist, muss der Imaginärteil des Zählers 0 sein, damit der Gesamtausdruck reell ist. Dieser Imaginärteil ist jedoch $(1 - |z|^2)$, woraus $|z| = 1$ folgt und damit das zu Zeigende.

- (b) Wir interpretieren $z-1$ und $z+1$ als die Vektoren, die 1 und -1 mit dem Punkt z verbinden. Falls $z \in S^1 \setminus \{-1, 1\}$, so ist $f(z)$ reell, also $\frac{z+1}{z-1} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ imaginär. Somit muss $\cos \varphi = 0$ gelten. Hieraus folgt $\varphi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, jedoch ist φ (bzw. sein Gegenwinkel) als die Differenz der Winkel $z+1$ und $z-1$ genau der Winkel bei z im betrachteten Dreieck. Der andere Teil der Aussage (aus einem rechten Winkel an z folgt, dass $z \in S^1 \setminus \{-1, 1\}$) folgt mit denselben Argumenten in umgekehrter Reihenfolge.

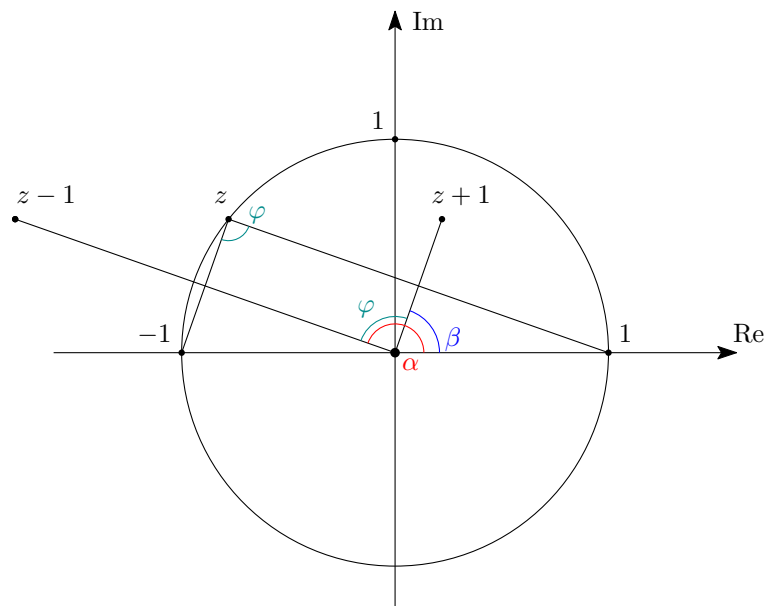


Abbildung 1: Illustration des Satzes von Thales. Als Quotient der Zahlen $z+1$ und $z-1$ ist φ (bzw. dessen Gegenwinkel) genau die Differenz von α und β .

Aufgabe 3

- (a) Sei $n = \deg a \geq \deg b = m$ und gelte $a = \sum_{k=0}^n a_k x^k, b = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ mit komplexen Zahlen a_k, b_k und $a_n \neq 0 \neq b_m$. Wähle nun $z = \frac{a_n}{b_m}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a - zx^{n-m}b &= \sum_{k=0}^n a_k x^k - z \sum_{k=0}^m b_k x^{n-m+k} = \sum_{k=0}^n a_k x^k - z \sum_{k=n-m}^n b_{k-n+m} x^k \\ &= \sum_{k=n-m}^n (a_k - zb_{k-n+m}) x^k + \sum_{k=0}^{n-m-1} a_k x^k. \end{aligned}$$

Insbesondere ist der Summand für $k = n$ von der Form $(a_n - zb_m) = 0$, woraus $\deg(a - zx^{n-m}b) < n = \deg a$ folgt, was zu zeigen war.

- (b) Nehme zuerst an, dass $\deg a < \deg b$. In diesem Fall können wir $q \equiv 0$, also q als das Nullpolynom (mit $\deg q = -\infty$) wählen. Damit gilt $\deg(a - qb) = \deg a < \deg b$.

Wir nehmen nun an, dass $\Delta := \deg a - \deg b$ und zeigen die Aussage mittels Induktion über Δ . Für den Induktionsanfang sei $\Delta \leq 0$, also $\deg a \leq \deg b$. Für $\deg a = \deg b$ folgt die Aussage dann nach Teilaufgabe (a), wir wählen q als das Konstante Polynom $z \in \mathbb{C}$ (mit z gewählt wie in (a)). Den Fall $\deg a < \deg b$ haben wir im obigen Absatz behandelt.

Sei nun also $\Delta > 0$ und gelte die Aussage für alle Polynome a', b' mit $\deg a' - \deg b' < \Delta$. Wir wenden Teilaufgabe (a) an und erhalten ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $\deg a' < \deg a$ mit $a' = a - zx^\Delta b$. Wir definieren $q_1 := zx^\Delta$. Nun können wir jedoch die IV auf a' und b anwenden, da $\deg a' - \deg b < \Delta$. Sei q_2 das somit erhaltene Polynom. Wir definieren $q := q_1 + q_2$ und sehen, dass

$$\deg(a - qb) = \deg(a' - q_2 b) < \deg b.$$

- (c) Wir wenden das induktive Schema aus Aufgabe (b) an. Sei dafür also zuerst $q_1 := x^3$. Dann folgt

$$a - q_1 b = ix^5 - x^4 + (1 - i)x^3.$$

Wir wählen $q_2 = ix^2$ und erhalten

$$a - (q_1 + q_2)b = -3x^4 - x^3 - (1 + i)x^2.$$

Wir wählen $q_3 := -3x$ und erhalten

$$a - (q_1 + q_2 + q_3)b = -(1 + 6i)x^3 + (2 - i)x^2 + (3 - 3i)x.$$

Wir wählen nun $q_4 := -(1 + 6i)$ und definieren $q := q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = x^3 + ix^2 - 3x - (1 + 6i)$ sowie $r = a - qb = (14 - 3i)x^2 + (4 + 3i)x - (7 + 5i)$, was die Polynome mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Für das im Hinweis angedeutete Schema sei auf die Aufgabe (f) verwiesen.

- (d) Wenn wir die Aussage aus (b) mit $a = p$ und $b = x - z$ anwenden, so erhalten wir dass es ein Polynom q gibt, sodass $p - (x - z)q = r$ mit $r \in \mathbb{C}[x]$ und $\deg r \in \{-\infty, 0\}$. Damit ist r ein konstantes Polynom. Jedoch gilt $p(z) - (z - z)q(z) = 0$, also muss $r(z) = 0$ und somit $r \equiv 0$. Hieraus folgt $p = (x - z)q$.

- (e) Wir setzen $q_1 = x^3$ und erhalten $p - q_1(x - i) = -(1 + i)x^3 + (i - 2)x^2 + 2ix + 1$.
 Wir setzen $q_2 = -(1 + i)x^2$ und erhalten $p - (q_1 + q_2)(x - i) = -x^2 + 2ix + 1$.
 Wir setzen $q_3 = -x$ und erhalten $p - (q_1 + q_2 + q_3)(x - i) = ix + 1$.
 Wählen wir nun $q_4 = i$ und $q = x^3 - (1 + i)x^2 - x + i$, so gilt $p - q(x - i) = 0$, also $p = (x - i)q$.
- (f) Mit dem Hinweis wissen wir, dass $a_1 = i$ und $a_2 = -i$. Statt die beiden Linearfaktoren nacheinander abzuspalten, spalten wir direkt $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ ab. Im Polynomdivisionsschema ergibt sich damit

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5) \\
 \underline{-x^4} \qquad \qquad \underline{-x^2} \\
 -2x^3 + 5x^2 - 2x \\
 \underline{2x^3} \qquad \qquad \underline{+2x} \\
 5x^2 \qquad \qquad +5 \\
 \underline{-5x^2} \qquad \underline{-5} \\
 0
 \end{array}$$

Das Polynom $x^2 - 2x + 5$ besitzt die Nullstellen $a_3 = 1 + 2i$ sowie $a_4 = 1 - 2i$, womit die Linearfaktorzerlegung gefunden ist.

Aufgabe 4

- (a) Die Polardarstellung von ω_n ist $(1, 2\pi/n)$ und folglich ist die Polardarstellung von ω_n^n gleich $(1, 2\pi) = (1, 0)$, also $\omega_n^n = 1$.
- (b) Die Polardarstellung von $1/\omega_n$ ist $(1, 0 - 2\pi/n) = (1, -2\pi/n)$, was ebenfalls die Polardarstellung von $\overline{\omega_n}$ ist.
- (c) Wir zeigen zuerst die Inklusion " $\subseteq$ ". Sei hierfür $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Nach dem Hinweis existiert also ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass z^n die Polardarstellung $(1, 2k\pi)$ hat. Folglich hat z die Polardarstellung $(1, \frac{k}{n}2\pi)$. Die ganze Zahl k' mit $k' := k + n$ liefert dieselbe Polardarstellung, denn $(1, \frac{k'}{n}2\pi) = (1, \frac{k}{n}2\pi + 2\pi) = (1, \frac{k}{n}2\pi)$, also ist z von der Form ω_n^k für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
 Wir zeigen nun " $\supseteq$ ". Sei also hierfür $k \in \{0, \dots, n-1\}$ gegeben. Damit hat $(\omega_n^k)^n$ die Polardarstellung $(1, \frac{kn}{n}2\pi) = (1, 2k\pi)$ und folglich mit dem Hinweis $(\omega_n^k)^n = 1$.
- (d) Erneut zeigen wir zuerst " $\subseteq$ ". Sei dafür ein $z \in \mathbb{C}$ gegeben, sodass $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$. Hieraus folgt sofort, dass $z \neq 1$. Wir nutzen nun die Identität der geometrischen Summe, die laut Vorlesung auch für komplexe Zahlen gilt. Also

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

und somit $1 - z^n = 0$. Es ist also $z^n = 1$ und mit Teilaufgabe (c) folgt $z = \omega_n^k$ für ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Für die Inklusion “ $\supseteq$ ” sei $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gegeben. Da insbesondere $k \neq 0$ ist $\omega_n^k \neq 1$ (denn $\frac{k}{n2\pi} \notin \mathbb{Z}$). Wieder unter Verwendung der geometrischen Summe folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = \frac{1 - (\omega_n^k)^n}{1 - \omega_n^k} = 0,$$

wobei für die letzte Identität Teilaufgabe (c), nämlich $(\omega_n^k)^n = 1$, verwendet wurde.

(e) Sei zuerst $k = l$. Dann ist

$$\overline{\omega_n^{kj}} \omega_n^{kj} = (\overline{\omega_n} \omega_n)^{kj} = |\omega_n|^{2kj} = 1^{2kj} = 1,$$

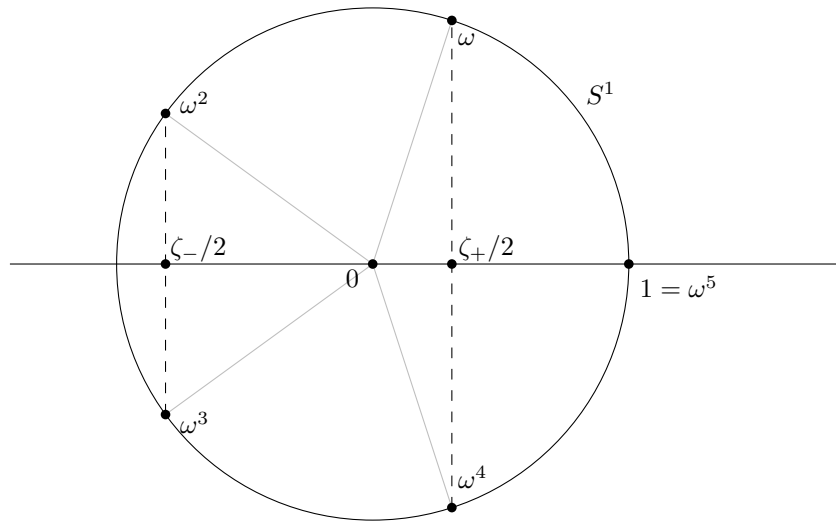
womit die Summe zu $\sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$ vereinfacht werden kann.

Sei also nun $k \neq l$, so gilt mit Aufgabe (b), dass $\overline{\omega_n^l} \omega_n^k = \frac{\omega_n^k}{\omega_n^l} = \omega_n^{k-l} \neq 1$. Also

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{jl}} \omega_n^{jk} &= \sum_{j=0}^{n-1} (\overline{\omega_n^l} \omega_n^k)^j = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^{k-l})^j \\ &= \frac{1 - \omega_n^{(k-l)n}}{1 - \omega_n^{k-l}} = \frac{1 - (\omega_n^n)^{k-l}}{1 - \omega_n^{k-l}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega_n^{k-l}} = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Eine mögliche Skizze ist die folgende.



(b) Die Polardarstellung von ω^4 ist $(1, \frac{4}{5}2\pi) = (1, -\frac{1}{5}2\pi)$ und damit $\omega^4 = \bar{\omega}$. Also $2 \operatorname{Re} \omega = \omega + \bar{\omega} = \zeta_+$. Die zweite Identität gilt mit analogem Beweis.

(c) Es gilt

$$\zeta_+ + \zeta_- + 1 = \sum_{k=0}^4 \omega^k = 0,$$

wobei für die zweite Identität Aufgabe 4(d) verwendet wurde. Des Weiteren gilt mit Aufgabe 4(b), dass

$$\begin{aligned}\zeta_+ \cdot \zeta_- &= (\omega + \bar{\omega})(\omega^2 + \bar{\omega}^2) = (\omega + \frac{1}{\omega})(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}) \\ &= \omega^3 + \omega + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3} = \omega^3 + \omega + \omega^4 + \omega^2 = -1.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$(x - \zeta_+)(x - \zeta_-) = x^2 - (\zeta_+ + \zeta_-)x + \zeta_+ \cdot \zeta_- = x^2 + x - 1.$$

Insbesondere sind also ζ_+ und ζ_- Nullstellen des Polynoms x^2+x-1 . Aus $\cos(2\pi/5) > \cos(4\pi/5)$ folgt $\zeta_+ > \zeta_-$ und damit durch Lösen der quadratischen Gleichung die explizite Darstellung $\zeta_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- (d) Per Definition gilt $\operatorname{Re} \omega = \zeta_+/2$. Des Weiteren gilt $1 = |\omega|^2 = (\operatorname{Re} \omega)^2 + \operatorname{Im} \omega^2$ und folglich

$$\operatorname{Im} \omega = \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta_+}{2}\right)^2},$$

was zur gesuchten Darstellung führt. Einsetzen von ζ_+ liefert die zweite Identität. Weiterhin folgt

$$\cos(72^\circ) = \cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin(72^\circ) = \sin(2\pi/5) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Aufgabe 6

- (b) Zunächst können wir der Einfachheit halber das positiv orientierte Dreieck ABC um $-A$ verschieben, sodass $A \mapsto 0$, $B \mapsto B - A$ und $C \mapsto C - A$. Die komplexe Zahl $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ entspricht einer Drehung um 120 Grad im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) und lässt sich in Polarkoordinaten als $(1, \frac{2\pi}{3})$ darstellen. Eine Drehung um 60 Grad im positiven Sinn lässt sich durch die komplexe Zahl $\tilde{\omega} = (1, \frac{\pi}{3})$ ausdrücken und es gilt $\tilde{\omega} = -\omega^2$. Nach der Konstruktion aus der Aufgabenstellung gilt dann $C' - B = \tilde{\omega}(A - B)$ und damit $C' = B - \omega^2(A - B)$. Analog dazu gilt $A' = C - \omega^2(B - C)$ und $B' = A - \omega^2(C - A)$.

Damit gilt

$$A'' = \frac{A' + B + C}{3} = \frac{C - \omega^2(B - C) + B + C}{3} = \frac{1 - \omega^2}{3}B + \frac{2 + \omega^2}{3}C, \quad (1)$$

$$B'' = \frac{B' + C + A}{3} = \frac{A - \omega^2(C - A) + C + A}{3} = \frac{1 - \omega^2}{3}C + \frac{2 + \omega^2}{3}A, \quad (2)$$

$$C'' = \frac{C' + A + B}{3} = \frac{B - \omega^2(A - B) + A + B}{3} = \frac{1 - \omega^2}{3}A + \frac{2 + \omega^2}{3}B. \quad (3)$$

- (c) Die Gleichung $B'' - S = \omega(A'' - S)$ ist nach (1) und (2) äquivalent zu der Gleichung

$$\frac{A - \omega^2(C - A) + C + A}{3} - \frac{A + B + C}{3} = \omega \left(\frac{C - \omega^2(B - C) + B + C}{3} - \frac{A + B + C}{3} \right),$$

die wiederum äquivalent ist zu

$$A - \omega^2(C - A) - B = \omega(C - \omega^2(B - C) - A). \quad (4)$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $A = (0, 0)$ und somit bekommen wir die zu (4) äquivalente Gleichung

$$-\omega^2 C - B = \omega C - \omega^3 B + \omega^3 C.$$

Jetzt benutzen wir die Tatsache, dass ω eine dritte Einheitswurzel ist, das heißt $\omega^3 = 1$. Damit ist (4) auch äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\omega^2 C &= \omega C + C \\ \Leftrightarrow (\omega^2 + \omega + 1)C &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit (und damit auch die Behauptung) gilt aber, da $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (siehe Hinweis in der Aufgabe).

- (d) Dass der Mittelpunkt von dem Dreieck $A''B''C''$ gleich S ist, folgt aus den Darstellungen (1),(2),(3) durch eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{A'' + B'' + C''}{3} &= \frac{(2 + \omega^2 + 1 - \omega^2)A + (2 + \omega^2 + 1 - \omega^2)B + (2 + \omega^2 + 1 - \omega^2)C}{9} \\ &= \frac{3A + 3B + 3C}{9} = \frac{A + B + C}{3} = S. \end{aligned}$$

Dass das Dreieck $A''B''C''$ gleichseitig ist, folgt aus Aufgabenteil (c). Analog zu dem Beweis der Teilaufgabe (c) kann man nämlich $C'' - S = \omega(B'' - S)$ und $A'' - S = \omega(C'' - S)$ zeigen. Insbesondere gilt dann auch $|A'' - S| = |B'' - S| = |C'' - S|$. Da aber

$$A'' - B'' = (A'' - S) - (B'' - S) = (1 - \omega)(A'' - S),$$

$$C'' - A'' = (C'' - S) - (A'' - S) = (1 - \omega)(C'' - S),$$

$$B'' - C'' = (B'' - S) - (C'' - S) = (1 - \omega)(B'' - S),$$

so sind auch die Beträge von $A'' - B''$, $C'' - A''$ und $B'' - C''$ gleich.