

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

Das Guthaben G setzt sich zusammen aus der Summe aller bisherigen Einzahlungen multipliziert mit $(1+p)^k$, wobei k gleich der seit der Einzahlung verstrichenen Jahre ist. Insgesamt erhält man unter Verwendung der geometrischen Reihe, unter der Annahme, dass $p \neq 0$:

$$G = \sum_{k=0}^{n-1} x(1+p)^k = x \frac{1 - (1+p)^n}{1 - (1+p)} = x \frac{1 - (1+p)^n}{-p} = x \frac{(1+p)^n - 1}{p}. \quad (1)$$

Für den Fall $p = 0$ gilt: $G = x \sum_{k=0}^{n-1} 1 = nx$. In der folgenden Tabelle sind die gefragten Werte jeweils auf ganze Euro gerundet angegeben:

p	0	0.01	0.04
$\frac{G}{\text{€}}$	4000	4889	9503

Aufgabe 2

a)

Behauptung. $A + B$ ist nichtleer

Beweis: Sei $a \in A, b \in B$, dann ist $a + b \in A + B$.

Behauptung. $A + B$ ist von oben beschränkt

Beweis: A und B sind jeweils nicht leer und von oben beschränkt, besitzen also ein Supremum. Definiere $\alpha := \sup A, \beta := \sup B$, dann gilt:

$$\forall c \in A + B : \exists a \in A, b \in B : c = a + b \leq \alpha + b \leq \alpha + \beta \quad (2)$$

Behauptung. $A + B$ hat keine kleinere obere Schranke als $\alpha + \beta$

Beweis durch Widerspruch: Nehme an, dass es gäbe eine obere Schranke $\gamma < \alpha + \beta$. Nun ist α die kleinste obere Schranke von A , also ist $A \cap]\alpha - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3}, \alpha]$ nicht leer, das gleiche gilt für $B \cap]\beta - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3}, \beta]$. Sei daher $a_0 \in A \cap]\alpha - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3}, \alpha], b_0 \in B \cap]\beta - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3}, \beta]$, dann gilt:

$$a_0 + b_0 \geq \alpha - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3} + \beta - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3} = \frac{\alpha + \beta}{3} + \frac{2\gamma}{3} > \frac{3\gamma}{3} = \gamma \quad (3)$$

Weil aber auch $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ ist, ist $a_0 + b_0 \in A + B$. Dieses Element von $A + B$ ist aber größer als γ , also kann γ keine obere Schranke von $A + B$ sein. $\square$

b)

Behauptung. $A \cdot B$ ist nichtleer

Beweis: Sei $a \in A, b \in B$, dann ist $ab \in A \cdot B$.

Behauptung. $A \cdot B$ ist von oben beschränkt

Beweis: A und B sind jeweils nicht leer und von oben beschränkt, besitzen also ein Supremum. Definiere $\alpha := \sup A, \beta := \sup B$, dann gilt:

$$\forall c \in A \cdot B : \exists a \in A, b \in B : c = ab \leq \alpha b \leq \alpha \beta \quad (4)$$

Behauptung. $A \cdot B$ hat keine kleinere obere Schranke als $\alpha\beta$

Beweis durch Widerspruch: Nehme an, dass es gäbe eine obere Schranke $\gamma < \alpha\beta$. Es gilt also $1 > \frac{\gamma}{\alpha\beta}$. Wir wählen $\delta_1 \in]\frac{\gamma}{\alpha\beta}, 1[, \delta_2 \in]\frac{\gamma}{\alpha\beta\delta_1}, 1[$.

Nun ist α die kleinste obere Schranke von A , also ist $A \cap]\alpha\delta_1, \alpha]$ nicht leer, das gleiche gilt für $B \cap]\beta\delta_2, \beta]$. Sei daher $a_0 \in A \cap]\alpha\delta_1, \alpha], b_0 \in B \cap]\beta\delta_2, \beta]$, dann gilt:

$$a_0 b_0 \geq \alpha \delta_1 \beta \delta_2 > \alpha \beta \delta_1 \frac{\gamma}{\alpha \beta \delta_1} = \gamma \quad (5)$$

Weil aber auch $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ ist, ist $a_0 b_0 \in A \cdot B$. Dieses Element von $A \cdot B$ ist aber größer als γ , also kann γ keine obere Schranke von $A \cdot B$ sein. $\square$

c) Definiere: $\alpha := \inf A$, laut Aufgabenstellung gilt $\alpha > 0$.

Behauptung. A^{-1} ist nichtleer

Beweis: Sei $a \in A$, dann ist $\frac{1}{a} \in A$.

Behauptung. A^{-1} ist von oben durch α^{-1} beschränkt.

Beweis: Sei $a \in A$ dann gilt: $a \geq \alpha \Leftrightarrow \alpha^{-1} \geq a^{-1}$

Behauptung. A^{-1} hat keine kleinere obere Schranke als α^{-1}

Beweis: Sei β^{-1} eine obere Schranke von A^{-1} . Dann gilt für jedes $a^{-1} \in A^{-1}$: $a^{-1} \leq \beta^{-1}$ und daher auch $a \geq \beta$. Nun ist α die größte untere Schranke von A . Es gilt also: $a \geq \alpha \geq \beta$ und daher $\alpha^{-1} \leq \beta^{-1}$, also ist α^{-1} die kleinste obere Schranke. $\square$

Aufgabe 3

Behauptung. Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ dann gilt:

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2 \quad (\text{Mon})$$

Beweis: Der Beweis besteht jeweils aus einer kurzen Rechnung. " $\Rightarrow$ ": Sei $a, b \in \mathbb{R}^+, a > b$:

$$a < b \Rightarrow a^2 < ab < b^2 \quad (6)$$

" $\Leftarrow$ ": Sei $a, b \in \mathbb{R}^+$, so dass $a^2 > b^2$ gilt. Beweis durch Widerspruch: nehme an, dass $a \leq b$:

$$a \leq b \Rightarrow a^2 \leq ab \leq b^2 \quad (7)$$

Was im Widerspruch zu $a^2 > b^2$ steht, die Annahme $a \leq b$ ist also falsch.

Nun zur Aufgabe, sei $a \in \mathbb{R}^+$ (für den Rest von Aufgabe 3).

a) Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1 $a \leq 1$:

Wir zeigen zuerst, dass $Q(a)$ nicht leer ist. Es gilt:

$$\frac{a^2}{2} = \frac{aa}{4} \leq \frac{a}{4} < a \quad (8)$$

Also ist $\frac{a}{2} \in Q(a)$. Nun zur Schranke, sei $x \in Q(a)$, dann gilt:

$$x^2 < a \leq 1 = 1^2 \Rightarrow x < 1 \quad (9)$$

Wobei (Mon) für den Schluss verwendet wurde. 1 ist also eine obere Schranke von $Q(a)$.

Fall 2 $a > 1$:

In diesem Fall ist $1 \in Q(a)$, weil $1^2 = 1 < a$ ist. Es gilt außerdem für jedes $x \in Q(a)$:

$$x < a < a^2 \quad (10)$$

Also ist a^2 eine obere Schranke von $Q(a)$.

b)

Behauptung. *Es gilt:*

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} \text{ von oben beschränkte Mengen : } A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B \quad (\text{sup})$$

Beweis: Sei $c \in A \subset B$ dann gilt $\forall b \in B : b \leq \sup B$, es gilt aber auch $c \in B$ und daher auch $c \leq \sup B$. Also ist jede obere Schranke von B auch eine obere Schranke von A . Damit ist die kleinste obere Schranke von A aber kleiner gleich als jede obere Schranke von B .

Nun zurück zur Aufgabe: $\sqrt{a} > 0$ gilt, weil die oben angeführten Elemente von $Q(a)$ größer als 0 sind und $\sqrt{a}$ eine obere Schranke von $Q(a)$ ist.

Wir zeigen “=” indem wir “ $\leq$ ” und “ $\geq$ ” zeigen:

Erste Richtung “ $\leq$ ”:

$$\begin{aligned} \sqrt{a}^2 &= \sqrt{a}\sqrt{a} = \sup Q(a) \sup Q(a) \stackrel{2b)}{=} \sup(Q(a)Q(a)) \\ &= \sup\{xy | x^2 < a, y^2 < a\} \stackrel{(\text{sup})}{\geq} \sup\{xy | x^2 < a, x = y\} = \sup\{x^2 | x^2 < a\} = a \end{aligned} \quad (11)$$

Zweite Richtung “ $\geq$ ”:

$$\begin{aligned} \sqrt{a}^2 &= \sup\{xy | x^2 < a, y^2 < a\} = \sup \left\{ \left\{ \begin{array}{l} xy \text{ falls } x \geq y \\ xy \text{ falls } x < y \end{array} \right\} \middle| x^2 < a, y^2 < a \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x^2 \text{ falls } x \geq y \\ y^2 \text{ falls } x < y \end{array} \right\} \middle| x^2 < a, y^2 < a \right\} \leq \sup \left\{ \left\{ \begin{array}{l} a \text{ falls } x \geq y \\ a \text{ falls } x < y \end{array} \right\} \middle| x^2 < a, y^2 < a \right\} = a \end{aligned} \quad (12)$$

□

c) Der Beweis folgt aus Aufgabe 3d) und Aufgabe 3b):

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{aa} \stackrel{\text{d)}}{=} \sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2} \stackrel{\text{b)}}{=} a \quad (13)$$

□

d) Beweis: Sei $b \in \mathbb{R}^+$. Wir zeigen die Gleichheit $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Erste Richtung " $\leq$ ":

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \sup\{x > 0 \mid x^2 < ab\} \stackrel{(\text{sup})}{\leq} \sup\{zy \mid y, z > 0, z^2 < a, y^2 < b\} \\ &\stackrel{\text{b)}}{\leq} \sup\{\sqrt{ay} \mid y, z > 0, z^2 < a, y^2 < b\} \leq \sup\{\sqrt{a}\sqrt{b} \mid y, z > 0, z^2 < a, y^2 < b\} = \sqrt{a}\sqrt{b} \end{aligned} \quad (14)$$

Zweite Richtung " $\geq$ ":

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \sup\{x > 0 \mid x^2 < ab\} \stackrel{\text{wähle: } x=\sqrt{az}}{\geq} \sup\{\sqrt{az} \mid z > 0, (\sqrt{az})^2 < ab\} \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \sup\{\sqrt{ay} \mid y, z > 0, z^2 < b\} = \sqrt{a} \sup\{z \mid z > 0, z^2 < b\} = \sqrt{a}\sqrt{b} \end{aligned} \quad (15)$$

□

Aufgabe 4

Es sei D die Menge der abbrechenden Dezimalbrüche wie in der Aufgabenstellung. Es sei weiterhin $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren:

$$\sup\{x \in D \mid x < a\} =: \sup A. \quad (16)$$

Dann ist a eine obere Schranke von A , denn für jedes $b \in A$ gilt: $b < a$. Es bleibt noch zu zeigen, dass a die kleinste obere Schranke ist. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass $\alpha < a$ ebenfalls eine obere Schranke von A sei. Das archimedische Axiom (zweite Variante im Skript) garantiert uns die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ sodass: $\frac{2}{n} < a - \alpha$. Daraus folgt für dieses n

$$\begin{aligned} 2 &< (a - \alpha)n \stackrel{\text{Bernoulli-Ungleichung}}{\leq} (a - \alpha)10^n \\ &\Rightarrow 2 + \alpha 10^n < a 10^n \Rightarrow \lfloor 1 + \alpha 10^n \rfloor < \lfloor a 10^n \rfloor \\ &\Rightarrow \frac{\lfloor 1 + \alpha 10^n \rfloor}{10^n} < \frac{\lfloor a 10^n \rfloor}{10^n} \leq a. \end{aligned} \quad (17)$$

Also ist $\frac{\lfloor 1 + \alpha 10^n \rfloor}{10^n} \in A$, aber auch $\frac{\lfloor 1 + \alpha 10^n \rfloor}{10^n} > \alpha$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass α eine obere Schranke von A ist. □

Aufgabe 5

a) Sei $m, l \in \mathbb{N}, m \geq l$ und a_l wie in der Aufgabenstellung. Dann gilt

$$a_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^l \frac{1}{n^2} + \sum_{n=l+1}^m \frac{1}{n^2} = a_l + \sum_{n=l+1}^m \frac{1}{n^2}, \quad (18)$$

woraus $a_l \leq a_m$ folgt. Zu zeigen ist nur noch

$$\sum_{n=l+1}^m \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{l} - \frac{1}{m}. \quad (19)$$

Dies beweisen wir mit Induktion über m :

Induktionsanfang " $m = 1$ ": die Aussage ist offensichtlich in diesem Fall.

Induktionsschritt " $m \rightarrow m + 1$ ": Der Beweis besteht aus einer kurzen Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{n=l+1}^{m+1} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=l+1}^m \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{l} - \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2} = \frac{1}{l} - \frac{(m+1)^2 - m}{m(m+1)^2} \\ &= \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1} \frac{(m+1)^2 - m}{m(m+1)} = \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1} \frac{m^2 + m + 1}{m^2 + m} \leq \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

□

b) Wir setzen $l = 1$ und finden für alle $m \in \mathbb{N}$, dass

$$1 \leq a_m \leq 2 - \frac{1}{m} < 2, \quad (21)$$

woraus folgt, dass A durch 2 nach oben beschränkt ist, also ist insbesondere $\sup A$ wohldefiniert.

c) Wenn wir $l = 10$ wählen, dann gilt

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}: \quad a_{10} \leq a_k \leq a_{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{k} &\leq a_{10} + \frac{1}{10} \\ \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad a_{10} \leq \sup A \leq a_{10} + \frac{1}{10}. \end{aligned} \quad (22)$$

Einen Taschenrechner (oder Computer) verwendend, ergibt sich

$$a_{10} \approx 1.5497677311665408. \quad (23)$$

Aufgabe 6

a) Seien $a, b, L(a, b)$ wie in der Aufgabenstellung. Wir finden: $2^{19} = 524288, 3^{11} = 177147, 3^{12} = 531441$, woraus $3^{11} < 2^{19} < 3^{12}$ folgt. Aus der ersten Ungleichheit folgt: $\frac{19}{12} \notin L(2, 3)$ und aus der Zweiten folgt $\frac{19}{11} \notin L(2, 3)$.

b) Wir beginnen mit einem Hilfslemma:

Lemma 1. *Es gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall a > 1, \forall b \in \mathbb{R}^+ : a > b \iff a^n > b^n. \quad (24)$$

Beweis:

Es sei $a > 1, a > b > 0$, wir führen den Beweis über Induktion über n :

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n + 1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$a^n > b^n \Rightarrow a^{n+1} > b^n a > b^{n+1}. \quad (25)$$

Nun zur Aufgabe: Seien $a, b, L(a, b)$ wie in der Aufgabenstellung. Seien weiterhin $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p > q, p \in L(a, b)$. Das heißt, wir finden $m, d \in \mathbb{Z}, n, e \in \mathbb{N}$ mit $p = \frac{m}{n}, q = \frac{d}{e}$, sodass

$$\frac{m}{n} > \frac{d}{e} \iff me > nd \iff me - dn > 0. \quad (26)$$

Wir finden also mit (24):

$$\begin{aligned} a^{me-dn} &\stackrel{(24)}{>} 1^{me-dn} = 1 \iff a^{nd} < a^{me} = (a^m)^e \stackrel{p \in L(a,b)}{<} (b^n)^e = b^{ne} \\ &\stackrel{(24)}{\Rightarrow} a^d < b^e \iff q \in L(a, b). \end{aligned} \quad (27)$$

□

c) Seien $a > 1, b \in \mathbb{R}^+$ wie in der Aufgabenstellung. Sei $\varepsilon = a - 1 > 0$. Wir zeigen zuerst, dass $L(a, b)$ nicht leer ist: Wähle $m \in \mathbb{N}_0$ nach dem archimedischen Axiom, so dass: $\frac{1}{m} < b\varepsilon$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} < m\varepsilon < 1 + m\varepsilon &\stackrel{\text{Bernoulli Ungl.}}{\leq} (1 + \varepsilon)^m = a^m \\ \Rightarrow \frac{1}{a^m} = a^{-m} < b &\Rightarrow \frac{-m}{1} \in L(a, b). \end{aligned} \quad (28)$$

Nun zur oberen Schranke: Wähle nach dem archimedischen Axiom $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $m\varepsilon > b - 1$. Dann folgt

$$a^m = (1 + \varepsilon)^m \geq 1 + m\varepsilon > b \Rightarrow \mathbb{Q} \ni \frac{m}{1} \notin L(a, b). \quad (29)$$

Die von uns gefundene rationale Zahl $h := \frac{m}{1}$ ist also nicht in $L(a, b)$ enthalten. Aufgrund von Teilaufgabe b) folgt daraus, dass h eine obere Schranke ist. Das kann man so einsehen: Nehme an, dass h keine obere Schranke ist. Dann gibt es ein $f \in L(a, b)$ mit $f \geq h$. Dann gilt aber entweder $h = f$, was ein Widerspruch zu $h \notin L(a, b)$ ist, oder $f > h$. Im zweiten Fall folgt nach Teilaufgabe b), dass $h \in L(a, b)$ was wiederum ein Widerspruch ist. □

d) Aus a) und c) folgt: $\frac{19}{12} \in L(2, 3)$, also ist $\log_2(3) \geq \frac{19}{12}$. Mit der gleichen Argumentation wie in c) folgt: $\log_2(3) < \frac{19}{11}$.

e)

Lemma 2. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ so dass $\inf A \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sup -A = -\inf A. \quad (30)$$

Beweis des Lemmas: “ $-\inf A$ ist eine obere Schranke von $-A$ ”: Sei $-a \in -A$, dann ist $a \in A$ und daher $\inf A \leq a$. Also folgt $-\inf A \geq -a$.

“Es gibt keine kleinere obere Schranke von $-A$ als $-\inf A$ ”: Nehme für einen Widerspruch an, dass $\mathbb{R} \ni \varepsilon < -\inf A$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Dann gilt

$$-\varepsilon > \inf A. \quad (31)$$

Wähle $c \in A \cap [\inf A, \frac{\inf A - \varepsilon}{2}]$. Diese Menge ist nicht leer, weil $\inf A$ ja die größte untere Schranke von A ist. Dann gilt: einerseits $-c \in -A$ und andererseits $-c \geq \frac{\varepsilon - \inf A}{2} > \varepsilon$, was ein Widerspruch dazu ist, dass ε eine obere Schranke ist.

Lemma 3. Sei $A \subset \mathbb{Q}$ mit

$$\forall p, q \in \mathbb{Q} : p \in A \wedge p > q \Rightarrow q \in A \quad (32)$$

und $\exists \sup A$ dann gilt

$$\sup A = \inf(\mathbb{Q} \setminus A). \quad (33)$$

Beweis: “ $\leq$ ”: Sei $c \in A$ dann gilt für jedes $u \in \mathbb{Q} \setminus A$: $u \geq c$ aufgrund von (32).

“ $\geq$ ”: Nehme für einen Widerspruch an, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit:

$$\inf(\mathbb{Q} \setminus A) - \sup A > \varepsilon. \quad (34)$$

Wähle dann ein $x \in]\sup A - \frac{\varepsilon}{3}, \sup A] \cap A$ und $y \in]\sup A, \sup A + \frac{\varepsilon}{3}[\cap (\mathbb{Q} \setminus A)$. Dann gilt

$$\inf(\mathbb{Q} \setminus A) - \sup A < y - x < \sup A + \frac{\varepsilon}{3} - [\sup A - \frac{\varepsilon}{3}] = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon, \quad (35)$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also gilt $\forall \varepsilon > 0 \inf(\mathbb{Q} \setminus A) - \sup A \leq \varepsilon$, also $\inf(\mathbb{Q} \setminus A) - \sup A = 0$.

Nun zur Aufgabe: Wir beginnen damit, $\log_a \left(\frac{1}{b}\right)$ umzuschreiben:

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{1}{b}\right) &= \sup \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < \frac{1}{b^n} \right\} = \sup \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^{-n} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^{-m} > b^n \right\} = \sup \left\{ -\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m > b^n \right\} \\ &\stackrel{(i)}{=} -\inf \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m > b^n \right\} \stackrel{(ii)}{=} -\sup \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m \leq b^n \right\} \\ &\stackrel{(iii)}{=} -\sup \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^n \right\} \\ &= -\log_a(b). \end{aligned} \quad (36)$$

Die mit (i) gekennzeichnete Gleichheit folgt aus (30), (ii) folgt aus (33) und (iii) sieht man wie folgt ein: Wir stellen fest, dass $C := \left\{ -\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m = b^n \right\}$ der Unterschied der beiden relevanten Mengen ist. Wenn das Supremum der linken Seite der Gleichung

nicht auf dieser Untermenge angenommen wird ist offensichtlich, dass die beiden Suprema übereinstimmen. Wir gehen also davon aus, dass C nicht leer ist und das Supremum der linken Seite der Gleichung auf C angenommen wird.

Sei $x \in C$, dann gibt es $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{m}{n} = x$ und daher $a^m = b^n$. Es gilt außerdem für jedes $l \in \mathbb{N}$: $a^{ml} = b^{nl}$ und damit auch

$$a^{lm-1} < a^{lm} = b^{ln} \Rightarrow \frac{lm-1}{ln} \in \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^n \right\} := A. \quad (37)$$

Wir finden nun mit den Rechenregeln für Suprema aus Aufgabe 2 die gesuchte Relation:

$$\begin{aligned} \sup A &\geq \sup \left\{ \frac{m}{n} - \frac{1}{ln} \mid \frac{m}{n} \in C, l \in \mathbb{N} \right\} = \sup C + \sup \left\{ -\frac{1}{ln} \mid \frac{m}{n} \in C, l \in \mathbb{N} \right\} \\ &\stackrel{(30)}{=} \sup C - \inf \left\{ \frac{1}{ln} \mid \frac{m}{n} \in C, l \in \mathbb{N} \right\} = \sup C - \inf \left\{ \frac{1}{n} \mid \frac{m}{n} \in C \right\} \inf \left\{ \frac{1}{l} \mid l \in \mathbb{N} \right\} \\ &\geq \sup C - 1 \cdot \inf \left\{ \frac{1}{l} \mid l \in \mathbb{N} \right\} = \sup C. \end{aligned} \quad (38)$$

Der zweite Fall zum Beweis der Gleichheit (" $\leq$ ") ist trivial, da $A \subset \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m \leq b^n \right\}$. $\square$

f) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+, a > 1$. Wir folgen dem Hinweis und beweisen zuerst " $\geq$ ". Sei $\frac{m}{n} \in L(a, bc)$, $\frac{\alpha}{\beta} \in L(a, b)$, $\frac{\gamma}{\delta} \in L(a, c)$, dann gilt:

$$a^m < b^n \quad \wedge \quad a^\alpha < b^\beta \quad \wedge \quad a^\gamma < b^\delta. \quad (39)$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} a^{m\beta\delta - \alpha n\delta - \gamma n\beta} &> b^{n\beta\delta} c^{n\beta\delta} a^{-\alpha n\delta - \gamma n\beta} = \left(\frac{b^\beta}{a^\alpha} \right)^{n\delta} \left(\frac{c^\delta}{a^\gamma} \right)^{n\beta} > 1 \\ \Rightarrow m\beta\delta - \alpha n\delta - \gamma n\beta &> 0 \Rightarrow \frac{m}{n} > \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \log_a(bc) \geq \log_a(b) + \log_a(c). \end{aligned} \quad (40)$$

Für " $\leq$ " verwenden wir die letzte Teilaufgabe:

$$\log_a(bc) = -\log_a(b^{-1}c^{-1}) \stackrel{>}{\leq} -\log_a(b^{-1}) - \log_a(c^{-1}) = \log_a(b) + \log_a(c). \quad (41)$$

$\square$