

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

Zuerst nummerieren wir die Zeilen der Definitionen damit wir uns später einfacher darauf beziehen können:

$$1 := N(0), 2 := N(1), 3 := N(2), 4 := N(3) \quad (1)$$

$$n + 0 := n \quad (2)$$

$$n + N(m) := N(n + m) \quad (3)$$

$$n \cdot 0 := 0 \quad (4)$$

$$n \cdot N(m) := n \cdot m + n \quad (5)$$

Nun führen wir die Beweise, wobei jeweils über dem Gleichheitszeichen steht, welchen Teil der Definition wir verwenden:

Teilaufgabe a):

$$1 + 1 \stackrel{(1)}{=} 1 + N(0) \stackrel{(3)}{=} N(1 + 0) \stackrel{(2)}{=} N(1) \stackrel{(1)}{=} 2 \quad (6)$$

Teilaufgabe b):

$$2 + 2 \stackrel{(1)}{=} 2 + N(N(0)) \stackrel{(3)}{=} N(2 + N(0)) \stackrel{(3), (2)}{=} N(N(2)) \stackrel{(1)}{=} N(3) \stackrel{(1)}{=} 4 \quad (7)$$

Teilaufgabe c):

$$2 \cdot 2 \stackrel{(1)}{=} 2 \cdot N(N(0)) \stackrel{(5)}{=} 2 \cdot N(0) + 2 \stackrel{(5)}{=} 2 \cdot 0 + 2 + 2 \stackrel{(4), (2)}{=} 2 + 2 \stackrel{(b)}{=} 4 \quad (8)$$

Aufgabe 2

Wir beziehen uns weiterhin auf die Definitionen aus Aufgabe 1 unter den Nummern (2) – (5).

Wir starten die Lösung mit zwei Beobachtungen.

Lemma 1 (L1). *Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$a + N(b) = N(a) + b.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über $b \in \mathbb{N}_0$. Für den Induktionsanfang ($b = 0$) beobachten wir, dass

$$a + N(0) \stackrel{(3)}{=} N(a + 0) \stackrel{(2)}{=} N(a) \stackrel{(2)}{=} N(a) + 0.$$

Als Induktionsvoraussetzung gelte die Aussage also für ein $b \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$a + N(N(b)) \stackrel{(3)}{=} N(a + N(b)) \stackrel{\text{IV}}{=} N(N(a) + b) \stackrel{(3)}{=} N(a) + N(b),$$

was zu zeigen war. □

Lemma 2 (L2). Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$n + 0 = 0 + n.$$

Beweis. Erneut gehen wir induktiv vor. Für den Induktionsanfang ($n = 0$) gilt $0 + 0 = 0 = 0 + 0$. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$, so sehen wir, dass

$$N(n) + 0 \stackrel{\text{L1}}{=} n + N(0) \stackrel{(3)}{=} N(n + 0) \stackrel{\text{IV}}{=} N(0 + n) \stackrel{(3)}{=} 0 + N(n).$$

□

Zunächst zeigen wir das Kommutativgesetz der Addition und verwenden es dann um das Assoziativgesetz der Addition zu beweisen:

- (b) Wir beweisen die Aussage $\psi(b) = [\forall a \in \mathbb{N}_0 : a + b = b + a]$ via Induktion über $b \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang ($b = 0$) Das zu Zeigende ist genau Lemma 2.

Induktionsvoraussetzung Es sei $b \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\psi(b)$.

Induktionsschritt ($b \rightarrow N(b)$) Es gilt

$$a + N(b) \stackrel{(3)}{=} N(a + b) \stackrel{\text{IV}}{=} N(b + a) \stackrel{(3)}{=} b + N(a) \stackrel{\text{L1}}{=} N(b) + a,$$

was für den Induktionsschritt zu zeigen war.

- (a) Wir beweisen die Aussage $\psi(a) = [\forall b, c \in \mathbb{N}_0 : (a + b) + c = a + (b + c)]$ via Induktion über $a \in \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang ($a = 0$) Es gilt

$$(0 + b) + c \stackrel{(b)}{=} (b + 0) + c \stackrel{(2)}{=} b + c \stackrel{(2)}{=} (b + c) + 0 \stackrel{(b)}{=} 0 + (b + c).$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $a \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\psi(a)$.

Induktionsschritt ($a \rightarrow N(a)$) Es gilt

$$\begin{aligned} (N(a) + b) + c &\stackrel{\text{L1}}{=} (a + N(b)) + c \stackrel{\text{IV}}{=} a + (N(b) + c) \stackrel{\text{L1}}{=} a + (b + N(c)) \\ &\stackrel{(3)}{=} a + N(b + c) \stackrel{\text{L1}}{=} N(a) + (b + c). \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Teilaufgabe a): Nach der Definition der Relation $<$ gilt:

$$1 < 3 = N(2) :\Leftrightarrow (1 = 2) \vee (1 < 2). \quad (9)$$

Insbesondere impliziert $1 < 2$ die Behauptung $1 < 3$. Wir zeigen also $1 < 2$:

$$1 < 2 = N(1) :\Leftrightarrow (1 = 1) \vee (1 < 1). \quad (10)$$

Nun gilt $1 = 1$ und damit folgt $1 < 2$.

Teilaufgabe b): Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, es gelte $3 < 1$. Dann liefert uns die Definition der Relation $<$ folgendes:

$$3 < 1 = N(0) :\Leftrightarrow (3 = 0) \vee (3 < 0). \quad (11)$$

Wir dürfen als bekannt voraussetzen, dass 3 von 0 verschieden ist und $3 < 0$ widerspricht dem ersten Punkt der Definition. Damit muss die Annahme $3 < 1$ falsch sein und der indirekte Beweis ist abgeschlossen.

Teilaufgabe c): Zunächst machen wir einige Beobachtungen:

Behauptung (B1). $\forall m \in \mathbb{N}_0 : m < N(m)$.

Die Behauptung B1 folgt direkt aus dem zweiten Punkt der Definition der Relation $<$.

Behauptung (B2). $\forall m \in \mathbb{N} : 0 < m$.

Die Behauptung B2 lässt sich durch eine einfache Induktion über $m \in \mathbb{N}$ beweisen.

Behauptung (B3). $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : n < m \Leftrightarrow N(n) < N(m)$.

Wir zeigen die Behauptung B3 per Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$. Der Induktionsanfang ($m = 0$) folgt direkt aus der Definition, denn

$$n < 0 \Leftrightarrow N(n) < N(0) :\Leftrightarrow (N(n) = 0) \vee (N(n) < 0). \quad (12)$$

Nun existiert kein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n < 0$ und $N(n) < 0$ nach Definition von $<$ auf der einen Seite und auf der anderen Seite widerspricht $N(n) = 0$ den Peano-Axiomen.

Für den Induktionsschritt nehmen wir für ein $m \in \mathbb{N}_0$ an, dass $n < m \Leftrightarrow N(n) < N(m)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Zu zeigen ist die analoge Aussage für $N(m)$. Betrachten wir nun die Aussage $N(n) < N(N(m))$, so ist diese nach Definition äquivalent zu $(N(n) < N(m)) \vee (N(n) = N(m))$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $N(n) < N(m)$ äquivalent zu $n < m$ und $N(n) = N(m)$ impliziert $n = m$ nach den Peano-Axiomen. Somit ist gilt insgesamt

$$N(n) < N(N(m)) \Leftrightarrow (n < m) \vee (n = m) :\Leftrightarrow n < N(m). \quad (13)$$

Dies schließt die Induktion ab und die Behauptung ist gezeigt.

Behauptung (B4). Die Relation $<$ ist transitiv, das heißt $\forall l, m, n \in \mathbb{N}_0 : (l < m, m < n \Rightarrow l < n)$.

Seien $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ und gelte $l < m < n$. Wir beweisen die Aussage via Induktion über l . Sei für den Induktionsanfang $l = 0$. Dann ist zu zeigen, dass $0 < n$. Hierfür beobachten wir zuerst, dass $n \neq 0$, was aus $m < n$ und aus dem ersten Punkt der Definition von $<$ folgt. Also gilt $0 < N(n') = n$ nach B2.

Für den Induktionsschritt gelte die Aussage für l, m, n und es gelte des weiteren $N(l) < m < n$. Erneut folgt mit dem ersten Punkt der Definition, dass $m \neq 0 \neq n$. Somit existieren Vorgänger m' und n' mit $N(m') = m$ sowie $N(n') = n$ (dies folgt aus den Peano-Axiomen). Aus B3 folgt damit wiederum $l < m'$ sowie $m' < n'$. Per IV erhalten wir also $l < n'$ und erneute Anwendung von B3 liefert $N(l) < N(n') = n$.

Wir sind nun bereit die Behauptung der Teilaufgabe c) zu beweisen. Dazu unterscheiden wir die beiden Fälle $n = m$ und $m \neq n$. Falls $n = m$, so bleibt zu zeigen $\neg(m < m)$.

Behauptung (B5). $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \neg(m < m)$.

Der Induktionsanfang ($m = 0$) folgt direkt aus dem ersten Punkt der Definition. Sei also $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben und es gelte die Induktionsvoraussetzung $\neg(m < m)$. Wegen Behauptung B3 gilt $\neg(N(m) < N(m)) \Leftrightarrow \neg(m < m)$. Damit gilt $\neg(N(m) < N(m))$ nach IV und der Induktionsbeweis ist abgeschlossen.

Es bleibt noch der Fall $n \neq m$ zu betrachten. Wir zeigen zuerst, dass folgendes gilt:

Behauptung (B6). $\forall m \neq n \in \mathbb{N}_0 : \neg[(m < n) \wedge (n < m)]$.

Die Behauptung B6 folgt aus der Transitivität der Relation $<$. Wir zeigen sie indirekt: Angenommen es gilt $m < n$ und für $n < m$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, dann folgt via Transitivität auch $m < m$, was im Widerspruch zur Behauptung B5 steht.

Nun bleibt nur noch folgendes zu zeigen:

Behauptung (B7). $\forall m \neq n \in \mathbb{N}_0 : \neg(m < n) \Rightarrow (n < m)$.

Wir beweisen die Aussage per doppelte Induktion über n und m :

Induktionsanfang ($n = 0 \vee m = 0$) Wir betrachten zuerst den Fall, dass $m = 0, n \in \mathbb{N}_0$ und nehmen an, es gelte $n \neq m$ und $\neg(0 < n)$. Da dies eine falsche Aussage ist, folgt auch $n < 0$.

Sei für den zweiten Fall nun also $n = 0, m \in \mathbb{N}_0$ und gelte $n \neq m$ (und $\neg m < 0$). Damit ist also $m \neq 0$ und die Aussage $0 < m$ ist wahr nach B2.

Induktionsvoraussetzung Es seien $n \neq m \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\neg(m < n) \Rightarrow n < m$.

Induktionsschritt $((n, m) \rightarrow (N(n), N(m)))$ Wir gehen über Kontraposition und nehmen an, es gelte $\neg(N(n) < N(m))$. Hieraus folgern wir $N(m) < N(n)$, was den Induktionsschritt beweist. Es gilt

$$\neg(N(n) < N(m)) \xrightarrow{B3} \neg(n < m) \xrightarrow{IV} m < n \xrightarrow{B3} N(m) < N(n),$$

was die Behauptung war. Damit ist die Induktion abgeschlossen.

Insgesamt ergeben die Behauptungen B5, B6 und B7 die Behauptung der Teilaufgabe c).

Aufgabe 4

Sei $\varphi(m) = [\forall a, b \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^m (a + nb) = (m+1)(a + mb/2)]$. Wir beweisen $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \varphi(m)$ mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $(\varphi(0) \text{ bzw. } m = 0)$ Es gilt

$$\sum_{n=0}^0 (a + nb) = a + 0 \cdot b = a = (0 + 1)(a + 0 \cdot b/2).$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben und es gelte $\varphi(m)$.

Induktionsschritt $(\varphi(m) \Rightarrow \varphi(m+1) \text{ bzw. } m \rightarrow m+1)$ Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N(m)} (a + nb) &= \sum_{n=0}^{m+1} (a + nb) = \sum_{n=0}^m (a + nb) + (a + (m+1)b) \\ &\stackrel{IV}{=} (m+1)(a + mb/2) + (a + (m+1)b) = (m+2)a + (m+1)(mb/2 + b) \\ &= (m+2)a + (m+1)((m+2)b/2) = (m+2)(a + (m+1)b/2). \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen und die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 5

(a) Schema: Für jede Aussage $\varphi(n)$ über natürliche Zahlen gilt:

Wenn $\varphi(0)$ und $\varphi(1)$ gelten, und wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ aus $\varphi(n)$ und $\varphi(N(n))$ die Aussage $\varphi(N(N(n)))$ folgt, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $\varphi(n)$.

In Formeln:

$$[\varphi(0) \wedge \varphi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\varphi(n) \wedge \varphi(N(n)) \Rightarrow \varphi(N(N(n))))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(n).$$

(b) Wir wenden das Schema aus (a) an, um die Aussage $\psi(n) = [a_n = n2^n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

Induktionsanfang $(\psi(0), \psi(1))$ Es gilt

$$a_0 = 0 = 0 \cdot 2^0, \quad a_1 = 2 = 1 \cdot 2^1.$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\psi(n-1) \wedge \psi(n)$.

Induktionsschritt $(\psi(n-1) \wedge \psi(n) \Rightarrow \psi(n+1))$ Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4(a_n - a_{n-1}) \stackrel{\text{IV}}{=} 4(n2^n - (n-1)2^{n-1}) \\ &= 4 \cdot 2^{n-1}(2n - (n-1)) = 2^{n+1}(n+1). \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Wir nehmen an, M besitzt kein kleinstes Element und zeigen, dass dann $M = \emptyset$ gilt. Dazu zeigen wir via Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $n \notin M$. Formal zeigen wir $\psi(n) = [(M \text{ besitzt kein kleinstes Element}) \Rightarrow (\forall m \leq n : m \notin M)]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang ($n = 1$) Der Induktionsanfang ist klar, da 1 die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$ ist und somit auch kleinstes Element von M falls $1 \in M$. Da M kein kleinstes Element enthält, muss $1 \notin M$.

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\psi(n)$.

Induktionsschritt $(\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1) \text{ bzw. } n \rightarrow n+1)$ Wir wissen per Induktionsvoraussetzung, dass $\{1, 2, \dots, n\} \cap M = \emptyset$. Falls also $n+1 \in M$, so wäre $n+1$ ein kleinstes Element in M . Da M kein kleinstes Element enthält, gilt $n+1 \notin M$, also gilt $\psi(n+1)$. Dies schließt den Induktionsschritt ab.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir also gezeigt, dass $n \notin M$. Daher muss $\mathbb{N} \cap M = \emptyset$. Da jedoch $M \subseteq \mathbb{N}$, folgt $M = \emptyset$. Da jedoch $M \neq \emptyset$, ist die Annahme, M besitze kein kleinstes Element, falsch.

Aufgabe 7

Wir zeigen mittels Induktion, dass eine wie in der Angabe definierte Funktion f für jeden Wert $n \in \mathbb{N}_0$ genau einen Wert annehmen kann. Wenn dies erfüllt ist, so gibt es genau eine solche Abbildung.

Induktionsanfang ($n = 0$) Der Induktionsanfang ist klar, da $f(0) = a$ eindeutig ist.

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es sei $f(n)$ eindeutig bestimmt.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$) Wegen $f(n+1) = g(n, f(n))$ gilt mit der Induktionsvoraussetzung, dass $g(n, f(n))$ zu den eindeutigen Argumenten $(n, f(n))$ als Abbildung einen eindeutigen Wert ausgibt, also $f(n+1)$ eindeutig ist.

Eine alternative Lösung ist die folgende: Seien f_1, f_2 zwei Abbildungen, welche die rekursive Definition der Angabe erfüllen. Wir zeigen via Induktion, dass $f_1(n) = f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Der Induktionsanfang ist klar, da $f_1(0) = a = f_2(0)$. Sei nun also $n \in \mathbb{N}_0$ und gelte $f_1(n) = f_2(n)$. Dann

$$f_1(n+1) = g(n, f_1(n)) \stackrel{\text{IV}}{=} g(n, f_2(n)) = f_2(n+1),$$

was den Induktionsschritt zeigt. Also $f_1 = f_2$.

Aufgabe 8

Zu zeigen ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Seien $a, b_1, \dots, b_n$ Aussagen, dann ist $a \wedge (b_1 \vee \dots \vee b_n)$ gleichwertig zu $(a \wedge b_1) \vee \dots \vee (a \wedge b_n)$.

Induktionsanfang ($n = 2$) Das Distributivgesetz für $n = 2$ gilt nach Vorlesung: $a \wedge (b_1 \vee b_2)$ gleichwertig zu $(a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2)$ für alle Aussagen a, b_1, b_2 .

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es gelte das folgende Distributivgesetz: $a \wedge (b_1 \vee \dots \vee b_n)$ gleichwertig zu $(a \wedge b_1) \vee \dots \vee (a \wedge b_n)$ für alle Aussagen $a, b_1, \dots, b_n$.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$) Für beliebige Aussagen $a, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ betrachte die Formel $(a \wedge b_1) \vee \dots \vee (a \wedge b_n) \vee (a \wedge b_{n+1})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies gleichwertig zu $[a \wedge (b_1 \vee \dots \vee b_n)] \vee (a \wedge b_{n+1})$. Nun lässt sich das aus der Vorlesung bereits bekannte Distributivgesetz für $n = 2$ anwenden:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \text{ ist gleichwertig mit } A \wedge (B \vee C), \quad (14)$$

insbesondere für $A = a$, $B = (b_1 \vee \dots \vee b_n)$ und $C = b_{n+1}$. Dies liefert uns die gleichwertige Formel

$$a \wedge (b_1 \vee \dots \vee b_n \vee b_{n+1}) \quad (15)$$

und damit das gewünschte Distributivgesetz für $n+1$.