

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

Zu Beginn stellen wir fest, dass sich die Aufgabe auf die folgende Aussage reduzieren lässt: Die logische Formel

$$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B) \quad (1)$$

ist gleichwertig zu der logischen Formel

$$A \Leftrightarrow B. \quad (2)$$

Um das zu sehen, betrachten wir die folgende Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	f	w	w	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w

Wir sehen, dass die letzten beiden Spalten der Tabelle in allen Zeilen übereinstimmen und stellen fest, dass (1) gleichwertig zu (2) ist. Dies gilt allgemein für alle Aussagen A und B . Ersetzen wir A nun mit $A_1 \wedge A_2$ und B mit $A_3 \wedge A_4$, so ergibt sich die gewünschte Äquivalenz zwischen

$$(A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_3 \wedge A_4) \wedge (\neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \neg(A_3 \wedge A_4)) \quad (3)$$

und

$$A_1 \wedge A_2 \Leftrightarrow A_3 \wedge A_4. \quad (4)$$

□

Aufgabe 2

Teilaufgabe a) Wir benutzen die de Morgan'sche Regel

$$\neg(\neg a \wedge \neg b) \text{ ist gleichwertig mit } a \vee b, \quad (5)$$

die bereits aus der Vorlesung bekannt ist. Seien A und B zwei beliebige Aussagen und wir setzen $a = \neg A$ und $b = \neg B$. Wenden wir nun die obige de Morgan'sche Regel für diese Wahl von a und b an, so erhalten wir

$$\neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \text{ ist gleichwertig mit } \neg A \vee \neg B. \quad (6)$$

Jetzt können wir benutzen, dass jede Aussage A gleichwertig zu der doppelten Negation $\neg\neg A$ ist, indem wir $\neg\neg A$ durch A und $\neg\neg B$ durch B auf der linken Seite von (6) ersetzen. Damit erhalten wir die gewünschte Äquivalenz

$$\neg(A \wedge B) \text{ ist gleichwertig mit } \neg A \vee \neg B \quad (7)$$

für zwei beliebige Aussagen A und B .

Teilaufgabe b) Analog zur Teilaufgabe a) nutzen wir hier die de Morgan'sche Regel

$$\neg(\neg a \vee \neg b) \text{ ist gleichwertig mit } a \wedge b. \quad (8)$$

Seien A und B zwei beliebige Aussagen und wir setzen $a = \neg A$ und $b = \neg B$. Wir wenden die obige de Morgan'sche Regel für diese Wahl von a und b an, erhalten

$$\neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B) \text{ ist gleichwertig mit } \neg A \wedge \neg B \quad (9)$$

und benutzen, dass $\neg\neg A$ gleichwertig zu A und $\neg\neg B$ gleichwertig zu B ist. Einsetzen in die linke Seite von (9) ergibt die gewünschte Äquivalenz

$$\neg(A \vee B) \text{ ist gleichwertig mit } \neg A \wedge \neg B \quad (10)$$

für zwei beliebige Aussagen A und B .

Aufgabe 3

Wir benutzen die de Morgan'sche Regel aus der Vorlesung (für $n = 2$):

$$\neg(\neg a \wedge \neg b) \text{ ist gleichwertig mit } a \vee b, \quad (11)$$

um die de Morgan'sche Regel für $n = 3$ zu zeigen. Seien hierfür a_1 , a_2 und a_3 beliebige Aussagen und wir setzen $a = a_1$, $b = a_2 \vee a_3$. Wenden wir nun die obige de Morgan'sche Regel für diese Wahl von a und b an, so erhalten wir

$$\neg(\neg a_1 \wedge \neg(a_2 \vee a_3)) \text{ ist gleichwertig mit } a_1 \vee (a_2 \vee a_3). \quad (12)$$

Die Variante der de Morgan'schen Regel aus der Aufgabe 2b) sagt uns nun, dass $\neg(a_2 \vee a_3)$ gleichwertig zu $\neg a_2 \wedge \neg a_3$ ist. Ersetzen wir $\neg(a_2 \vee a_3)$ in (12) also durch $\neg a_2 \wedge \neg a_3$, so erhalten wir

$$\neg(\neg a_1 \wedge (\neg a_2 \wedge \neg a_3)) \text{ ist gleichwertig mit } a_1 \vee (a_2 \vee a_3), \quad (13)$$

was nach dem Assoziativgesetz der gesuchten Variante der de Morgan'schen Regel für $n = 3$ entspricht.

Aufgabe 4

Wir benutzen das aussagenlogische Distributivgesetz aus der Vorlesung (für $n = 2$):

$$a \wedge (b \vee c) \text{ ist gleichwertig mit } (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad (14)$$

um das Distributivgesetz für $n = 3$ zu zeigen. Seien hierfür a , b_1 , b_2 und b_3 beliebige Aussagen und wir setzen $b = b_1$, $c = b_2 \vee b_3$. Wenden wir nun das obige Distributivgesetz für diese Wahl von a , b und c an, so erhalten wir

$$a \wedge (b_1 \vee (b_2 \vee b_3)) \text{ ist gleichwertig mit } (a \wedge b_1) \vee (a \wedge (b_2 \vee b_3)). \quad (15)$$

Nun ist $a \wedge (b_2 \vee b_3)$ gleichwertig zu $(a \wedge b_2) \vee (a \wedge b_3)$ nach dem obigen Distributivgesetz. Somit erhalten wir insgesamt unter Verwendung des Assoziativgesetzes:

$$a \wedge (b_1 \vee b_2 \vee b_3) \text{ ist gleichwertig mit } (a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2) \vee (a \wedge b_3). \quad (16)$$

Aufgabe 5

Die gegebenen und behaupteten Aussagen an den mit $\boxed{*}_i$ gekennzeichneten Stellen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

i	noch zu zeigen	gegeben
1	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 \forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	-
2	$\exists \delta > 0 \forall x > 0 \forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$\varepsilon > 0$ beliebig
3	$\forall x > 0 \forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$\varepsilon > 0$ beliebig, $\delta = \varepsilon^2$
4	$\forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$x, \varepsilon > 0$ beliebig, $\delta = \varepsilon^2$
5	$y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$x, \varepsilon > 0, y > x$ beliebig, $\delta = \varepsilon^2$
6	$\sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$x, \varepsilon > 0, y > x$ mit $y - x < \delta$ (für $\delta = \varepsilon^2$), sonst beliebig.
7	es gibt nichts mehr zu zeigen	nichts relevantes gegeben, Beweis vollendet

Die allgemeinen und gegebenen Aussagen an den mit (j) gekennzeichneten Stellen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

j	allgemein	gegeben
1	$\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow a + b \geq b$	$x > 0$
2	$\forall a, b \in \mathbb{R} : b \geq 0 \Rightarrow a \geq a - b$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \wedge b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$	$x > 0, y > x$
3	$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow a = \sqrt{a}^2$	$x, y > 0$
4	$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a \geq b \wedge c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \leq \frac{c}{b}$	$\forall a, b \in \mathbb{R} : b \geq a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{a} \geq \sqrt{b - a}$ $x > 0, y > 0$
5	$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	$y - x < \delta, y > x$
6	$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b = c \Rightarrow a = c$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b < c \Rightarrow a < c$ $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = a$	$\delta = \varepsilon^2$

Aufgabe 6

Teilaufgabe a) Wir formen schrittweise um:

$$\begin{aligned}
 \neg [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)] &\Leftrightarrow \\
 \exists \varepsilon > 0 \neg [\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)] &\Leftrightarrow \\
 \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \neg [\forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)] &\Leftrightarrow \\
 \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : \neg [(|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)] &\Leftrightarrow \\
 \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \wedge |x^2 - y^2| \geq \varepsilon) &\quad (17)
 \end{aligned}$$

Für die letzte Äquivalenzumformung bemerken wir, dass für zwei Aussagen A und B

$$\neg(A \Rightarrow B) \text{ ist gleichwertig mit } A \wedge \neg B \quad (18)$$

gilt und nutzen den Hinweis aus der Aufgabenstellung ($\neg(|x^2 - y^2| < \varepsilon) \Leftrightarrow |x^2 - y^2| \geq \varepsilon$).

Teilaufgabe b) Zu dieser Aufgabe ist keine Lösung abzugeben.

Teilaufgabe c) Wir haben im Beweis schon Positionen mit Δ markiert, um in der nächsten Teilaufgabe darauf Bezug nehmen zu können.

Sei $\varepsilon = 1$. (Δ_1) Sei $\delta > 0$ (sonst beliebig) gegeben. (Δ_2) Wir setzten $x = \frac{\delta}{4} + \frac{2}{\delta}$ (Δ_3) und $y = \frac{2}{\delta} - \frac{\delta}{4}$.¹ (Δ_4)

Dann gilt:

$$|x - y| = \left| \frac{\delta}{4} + \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{4} - \frac{2}{\delta} \right| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad (19)$$

und außerdem:

$$|x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| = \left| \frac{\delta}{2} \left(\frac{\delta}{4} + \frac{2}{\delta} - \frac{\delta}{4} + \frac{2}{\delta} \right) \right| = \frac{\delta}{2} \left| \frac{4}{\delta} \right| = 2 \geq 1 = \varepsilon. \quad (20)$$

(Δ_5)

Teilaufgabe d) Wir führen in einer Tabelle an, was noch zu zeigen, bzw. was durch den bisherigen Beweis bis zum Punkt Δ_i schon gegeben ist.

	noch zu zeigen	durch bisherigen Beweis gegeben
Δ_1	$\forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x - y < \delta \wedge x^2 - y^2 \geq \varepsilon)$	$\varepsilon = 1$
Δ_2	$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x - y < \delta \wedge x^2 - y^2 \geq \varepsilon)$	$\delta > 0, \varepsilon = 1$
Δ_3	$\exists y \in \mathbb{R} : (x - y < \delta \wedge x^2 - y^2 \geq \varepsilon)$	$\delta > 0, \varepsilon = 1, x = \frac{\delta}{4} + \frac{2}{\delta}$
Δ_4	$(x - y < \delta \wedge x^2 - y^2 \geq \varepsilon)$	$\delta > 0, \varepsilon = 1, x = \frac{\delta}{4} + \frac{2}{\delta}, y = -\frac{\delta}{4} + \frac{2}{\delta}$
Δ_5	Es gibt nichts mehr zu zeigen	-

¹Man findet diese Werte für x, y beispielsweise, indem man erkennt, dass $|x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)|$ ist. Da der erste Faktor auf einen Wert kleiner als δ festgelegt ist (also z.B. $\delta/2$), muss der zweite Faktor ein Vielfaches vom Kehrwert davon sein, damit das Produkt insgesamt einen großen Wert annehmen kann, also z.B. $\frac{4}{\delta}$. Wir haben dann also $x - y = \delta/2$, $x + y = \frac{4}{\delta}$ und müssen diese Gleichungen nur noch nach x und y auflösen.