

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

- a) : Seien $a, \lambda, \omega > 0$ gegeben. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass $e^{-\lambda x} \cos(\omega x) = \operatorname{Re} e^{-\lambda x + i\omega x}$ gilt und wir die Stammfunktion der rechten Seite dieser Gleichung erraten können. Umformen liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{-\lambda + i\omega} e^{-\lambda x + i\omega x} &= \operatorname{Re} \frac{-\lambda - i\omega}{\lambda^2 + \omega^2} e^{-\lambda x + i\omega x} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} \left(-\lambda e^{-\lambda x} \cos(\omega x) + \omega e^{-\lambda x} \sin(\omega x) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Durch Ableiten der so gefundenen Funktion lässt sich leicht sicher stellen, dass es wirklich die gesuchte Stammfunktion ist. Das Integral ergibt dann

$$\int_0^a e^{-\lambda x} \cos(\omega x) dx = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} \left(-\lambda \left(e^{-\lambda a} \cos(\omega a) - 1 \right) + \omega e^{-\lambda a} \sin(\omega a) \right). \quad (2)$$

- b) : Seien $a, \omega, \lambda > 0$ gegeben. Wir verwenden den gleichen Trick wie in Teilaufgabe a). Die Funktion $x \mapsto e^{-\lambda x} \sin(\omega x)$ ist der Imaginärteil der Funktion $x \mapsto e^{(-\lambda + i\omega)x}$ und deren Stammfunktion ist $x \mapsto g(x) := \frac{1}{-\lambda + i\omega} e^{(-\lambda + i\omega)x}$; deshalb leiten wir den Imaginärteil dieser Funktion ab. Es ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2 + \omega^2} (-\lambda \sin(\omega x) - \omega \cos(\omega x)) = e^{-\lambda x} \sin(\omega x). \quad (3)$$

Daher gilt für das Integral

$$\int_0^a e^{-\lambda x} \sin(\omega x) dx = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda^2 + \omega^2} (-\lambda \sin(\omega a) - \omega (\cos(\omega a) - 1)). \quad (4)$$

- c): Sei $a > 0$ gegeben. Wir versuchen den gleichen Trick noch einmal, der Integrand ist identisch mit $\operatorname{Re} x^2 e^{(-1+i)x}$. Die Stammfunktion zu dieser Funktion ist gleich

$$x \mapsto \frac{x^2}{-1+i} e^{(-1+i)x} - \frac{2x}{(-1+i)^2} e^{(-1+i)x} + \frac{2}{(-1+i)^3} e^{(-1+i)x}. \quad (5)$$

Der Realteil davon ist

$$-\frac{x^2}{2} e^{-x} \cos(x) + \frac{x^2}{2} e^{-x} \sin(x) + x e^{-x} \sin(x) + \frac{1}{2} e^{-x} \cos(x) + \frac{1}{2} e^{-x} \sin(x). \quad (6)$$

Durch Ableiten kann wieder leicht überprüft werden, dass das die gesuchte Stammfunktion ist. Damit lässt sich das gesuchte Integral als

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 e^{-x} \cos(x) dx &= \frac{-x^2}{2} e^{-x} \cos(x) + \frac{x^2}{2} e^{-x} \sin(x) + x e^{-x} \sin(x) + \frac{1}{2} e^{-x} \cos(x) + \frac{1}{2} e^{-x} \sin(x) \Big|_{x=0}^a \\ &= \frac{-a^2}{2} e^{-a} \cos(a) + \frac{a^2}{2} e^{-a} \sin(a) + x e^{-a} \sin(a) + \frac{1}{2} e^{-a} \cos(a) + \frac{1}{2} e^{-a} \sin(a) - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

darstellen.

d): Sei $a > 0$ gegeben. Wir erinnern uns an die Kettenregel und die Ableitung der Wurzelfunktion und bestimmen damit

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^a \frac{d}{dx} (-\sqrt{1-x^2}) dx = 1 - \sqrt{1-a^2}. \quad (8)$$

e): Sei $a > 0$ gegeben. Wir erinnern uns an Aufgabe 1e) von Blatt 10 und bestimmen damit

$$\int_0^a x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^a \frac{d}{dx} (-e^{-\frac{x^2}{2}}) dx = 1 - e^{-\frac{a^2}{2}}. \quad (9)$$

f): Seien $1 < a < b$ gegeben. Wir substituieren mit $y = \ln x$, dann ergibt sich

$$\int_a^b \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{dy}{y} = \ln(\ln a) - \ln(\ln b). \quad (10)$$

g): Sei $a > 0$ gegeben. Wir lösen das Integral mit partieller Integration. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^a x^n \ln x dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \Big|_{x=1}^a - \int_1^a \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{n+1} a^{n+1} \ln a - \left(\frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} \Big|_{x=1}^a \right) \\ &= \frac{1}{n+1} a^{n+1} \ln a - \frac{1}{(n+1)^2} (a^{n+1} - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

h): Sei $a > 0$ gegeben. Auch dieses Integral lösen wir mit partieller Integration. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^a x \arctan x dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_{x=0}^a - \int_0^a \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \arctan a - \frac{1}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \arctan a - \frac{1}{2} (a - \arctan a) \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + 1) \arctan a - \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

i): Sei $0 < a < 1$ gegeben. Auch dieses Integral lösen wir mit partieller Integration. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^a \arcsin x dx &= x \arcsin x \Big|_{x=0}^a - \int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= a \arcsin a + \sqrt{1-x^2} \Big|_{x=0}^a \\ &= a \arcsin a + \sqrt{1-a^2} - 1.\end{aligned}\tag{13}$$

j): Sei $a > 0$ gegeben. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1-e^x}{1+e^x} dx &= \int_0^a \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \\ &= - \int_0^a \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx - \int_0^a \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ &= - \ln(1+e^{-x}) \Big|_{x=0}^a - \ln(1+e^x) \Big|_{x=0}^a \\ &= - \ln(1+e^{-a}) - \ln(1+e^a) + 2 \ln 2.\end{aligned}\tag{14}$$

(k) Nach Umformung und Partialbruchzerlegung sehen wir, dass

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = x - 1 - \frac{2x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

was uns zu

$$\begin{aligned}\int_{-1}^a f(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \log|1-x| - 2 \log|2-x| + \log|x| \right]_{-1}^a \\ &= \frac{a^2}{2} - a - \log(1-a) - 2 \log(2-a) + \log(-a) - \frac{3}{2} + \log 18\end{aligned}$$

führt.

(l) Nach Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{16}{x^4+4} = \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2} - \frac{2(x-2)}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{2}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x-1)^2+1}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x) dx &= \left[\log(x^2+2x+2) - \log(x^2-2x+2) + 2 \arctan(x+1) + 2 \arctan(x-1) \right]_0^a \\ &= \log(a^2+2a+2) - \log(a^2-2a+2) + 2 \arctan(a+1) + 2 \arctan(a-1).\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a): Wir beobachten, dass die Funktion f sich mit $y := \ln x$ als

$$f(x) = y' \frac{1}{y^2}\tag{15}$$

schreiben lässt. Daher ist $F(x) = \frac{-1}{y} = \frac{-1}{\ln x}$ eine Stammfunktion.

b): Wir verwenden die Notation der Definition des Riemann-Integrals. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3$ gegeben. Es gilt

$$F(n) - F(2) = \int_2^n f(x) dx = \sup_{\substack{g \in \mathcal{T}[2,n] \\ g \leq f}} \int_2^n g(x) dx. \quad (16)$$

Wir wählen die Treppenfunktion

$$g : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{(\lfloor x \rfloor + 1)(\ln(\lfloor x \rfloor + 1))^2}, \quad (17)$$

diese ist kleiner als f . Damit gilt insgesamt

$$\int_2^n g(x) dx = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \frac{-1}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2}. \quad (18)$$

Damit konvergiert die Reihe, weil alle Partialsummen kleiner als $\frac{1}{\ln 2}$ sind. $\square$

Aufgabe 3

a): Nach der Vorlesung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \frac{e^{ix}}{2i} - \frac{e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2}. \quad (19)$$

b): Die allgemeine binomische Formel besagt, dass für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (20)$$

gilt.

c): Wir verwenden die ersten zwei Teilaufgaben um den Integranden anders darzustellen. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx &= \int_0^{2\pi} (e^{ix} - e^{-ix})^{2n} \left(\frac{-1}{4}\right)^n dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{ikx} e^{-ix(2n-k)} (-1)^{2n-k} \left(\frac{-1}{4}\right)^n dx \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^{2\pi} e^{ix(k-2n+k)} (-1)^k \left(\frac{-1}{4}\right)^n dx \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2i(k-n)} e^{ix2(-n+k)} \Big|_{x=0}^{2\pi} (-1)^k \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \binom{2n}{n} \frac{2\pi}{4^n} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{2\pi}{4^n}. \end{aligned} \quad (21)$$

Aufgabe 4

- (a) Sei $R(x, y) = \frac{1}{3x-4y-25}$. Mit $\frac{dx}{dt} = \frac{10(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^a R(x, \sqrt{25-x^2}) dx &= \int_0^{g(a)} R\left(\frac{10t}{1+t^2}, \frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right) \cdot \frac{10(1-t^2)}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \int_0^{g(a)} \frac{2t^2-2}{t^4-6t^3+10t^2-6t+9} dt \\ &= \frac{1}{25} \left[6 \log(3-t) - 3 \log(t^2+1) + \frac{40}{3-t} - 8 \arctan t \right]_0^{g(a)} \\ &= \frac{1}{25} \left(6 \log(3-g(a)) - 3 \log(g(a)^2+1) + \frac{40}{3-g(a)} - 8 \arctan g(a) - \frac{40}{3} - 6 \log 3 \right), \end{aligned}$$

wobei hier $g(a) = \frac{5-\sqrt{25-a^2}}{a}$, d.h. wir betrachten jene Hälfte von K mit nichtnegativer y -Koordinate.

- (b) Wir substituieren $x = 5 \cos \varphi$, dann ist $\frac{dx}{d\varphi} = -5 \sin \varphi$ und $\sin \varphi = \frac{1}{5} \sqrt{25-x^2}$. Dies führt zu

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\sin \varphi}{3 \cos \varphi - 4 \sin \varphi - 5} d\varphi = - \int_0^{5 \cos \alpha} \frac{1}{3x - 4\sqrt{25-x^2} - 25} dx$$

Mit $g(5 \cos \alpha) = \frac{1-\sin \alpha}{\cos \alpha}$ können wir das Integral nun durch Einsetzen in das Ergebnis aus (a) berechnen.

Aufgabe 5

- a): Seien $0 < b < a$ gegeben. Das Integral lässt sich mittels der Substitution $z := \cos t$ umformen, es gilt

$$\begin{aligned} U(a, b) &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} dt = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= 2a \int_1^{-1} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t}}{-\sin t} dz = 2a \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 z^2}}{\sqrt{1-z^2}} dz. \end{aligned} \tag{22}$$

□

- b): Es gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t \right) dt + \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t \right) dt, \end{aligned}$$

wobei $\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t \right) = o(\varepsilon^2)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ nach Lemma 1 aus der Musterlösung von Blatt 11. Wir wollen nun zeigen, dass auch

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t \right) dt = o(\varepsilon^2)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt. Hierfür schätzen wir den Integranden gleichmäßig in t ab. Die folgende Beobachtung hilft uns: Für alle $x \in [-1, \infty)$ gilt

$$|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}| = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq x^2,$$

wobei wir für die Ungleichung bemerken, dass die Funktion $1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} - x^2$ ihr globales Maximum 0 an der Stelle $x = 0$ annimmt.

Für die Wahl $x = -\varepsilon^2 \cos^2 t$ (mit ε hinreichend klein im Betrag) erhalten wir also

$$\left| \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t \right) \right| \leq \varepsilon^4 \cos^4 t \leq \varepsilon^4$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit

$$\left| \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t \right) dt \right| \leq 2\pi\varepsilon^4 = o(\varepsilon^2).$$

Insgesamt gilt dann

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t \right) dt + o(\varepsilon^2) \\ &\stackrel{*}{=} 2\pi - \frac{\varepsilon^2}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t)) dt + o(\varepsilon^2) \\ &= 2\pi - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{23}$$

wobei für die mit $*$ gekennzeichnete Gleichung das folgende Additionstheorem für den Kosinus verwendet wurde:

$$\cos(t+t) = \cos t \cos t - \sin t \sin t = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1. \tag{24}$$

Aufgabe 6

- a): Aus der Erklärung lässt sich ablesen, dass die Steigung der Tangente an die Funktion im Punkt x durch die Kraftkomponenten gegeben ist. Es gilt daher für alle $x \in [x_0, x_1]$

$$f'(x) = \frac{F_2(x)}{F_1} = \frac{F_2(x_0)}{F_1} + \frac{\rho}{F_1} L(x). \tag{25}$$

Wir verwenden nun für L die im Skript angegebene Formel zur Bestimmung der Länge einer Kurve und erhalten

$$f'(x) = \frac{F_2(x)}{F_1} = \frac{F_2(x_0)}{F_1} + \frac{\rho}{F_1} \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt. \tag{26}$$

Dies ist die gewünschte Gleichung, es ergibt sich also für die Konstanten $b = \frac{F_2(x_0)}{F_1}$ und $c = \frac{\rho}{F_1}$.

b): Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt direkt

$$f''(x) = c\sqrt{1 + (f'(x))^2}. \quad (27)$$

Das ist gleichbedeutend mit der geforderten Gleichung.

c): Wir führen die Notation $g := f'$ ein. Gleichung (27) wird dann zu

$$g'(x) = c\sqrt{1 + g^2(x)}. \quad (28)$$

Durch die Anwendung der Substitutionsregel (Satz 5.20) erhält man

$$\int_{g(x_0)}^{g(x)} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \int_{x_0}^x c dt. \quad (29)$$

Den Integranden der linken Seite erkennen wir wieder als die Ableitung des Arcsinus. Es gilt daher

$$\arcsin g(x) = cx - cx_0 + \arcsin g(x_0). \quad (30)$$

Die gewünschte Beziehung ergibt sich mit $x_2 = x_0 - \frac{1}{c}\arcsin g(x_0)$. Insgesamt folgt also für f

$$f(x) = \frac{1}{c} \cosh(c(x - x_2)) + y_2. \quad (31)$$