

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Zunächst beweisen wir ein Hilfslemma, welches wir in den Aufgaben 1 und 3 verwenden werden.

Lemma 1. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ für $x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Das zu Zeigende ist äquivalent zur Aussage

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Sei dafür $\varepsilon > 0$. Wir beobachten zuerst, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \left(\frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die nächste Beobachtung ist, dass die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ stetig auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist, was Satz 3.66 zusammen mit der Monotonie der Umkehrfunktion x^2 auf $\mathbb{R}_{>0}$ ergibt. Mit Satz 3.46 ist auch f stetig, insbesondere können wir f im Punkt 0 via $f(0) := 0$ stetig fortsetzen. Wir können also $\delta > 0$ finden, sodass für alle $x \in U_\delta(0)$, also für alle $|x| < \delta$, die Ungleichung

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$$

gilt. Doch dies ist genau, was zu zeigen war. □

Nun zu den Aufgaben:

Aufgabe 1

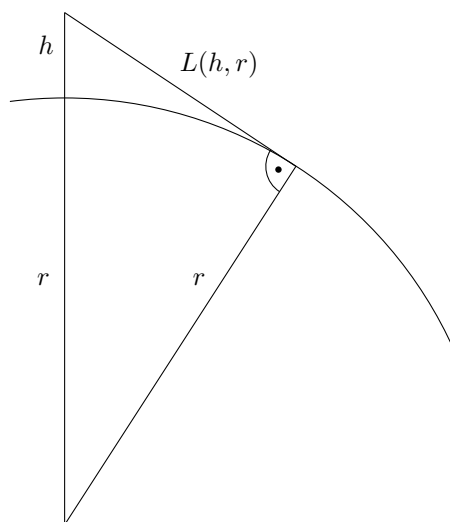


Abbildung 1: Geometrische Skizze der Aufgabe

Aus Abbildung 1 geht hervor, dass mit einer Anwendung des Satzes des Pythagoras $L(h, r)^2 = (r + h)^2 - r^2 = 2rh + h^2$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} L(h, r) &= \sqrt{2rh + h^2} = \sqrt{2rh} \sqrt{1 + \frac{h}{2r}} = \sqrt{2rh} \sqrt{1 + \mathcal{O}\left(\frac{h}{r}\right)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sqrt{2rh} \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{h}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei die $\mathcal{O}$ -Notation für $h/r \rightarrow 0$ gilt und in (*) Lemma 1 verwendet wurde. Es ist also $c = \sqrt{2}, a = b = 1/2$.

Die exakte Berechnung ergibt $L(10, 6370000) = 11287,16528$, die Näherung dagegen 11287,16085.

Aufgabe 2

- (a) Wir zeigen mit Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass die Aussage für *alle* Funktionen g , welche die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt. Für den Induktionsanfang $n = 0$ ist gegeben, dass g stetig ist und $g(0) = 0$, während zu zeigen ist, dass $g(x) = \mathcal{O}(1)$ für $x \rightarrow 0$. Es gilt jedoch sogar $g(x) = o(1)$ für $x \rightarrow 0$, denn $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ folgt aus der Stetigkeit von g .

Gelte für den Induktionsschritt die Aussage also nun für *alle* Funktionen, die entsprechende Bedingungen für $n \geq 0$ erfüllen. Sei eine $(n+1)$ -fach stetig differenzierbare Funktion g mit $g^{(j)} = 0$ für $0 \leq j \leq n$ gegeben. Sei weiterhin $x \in \mathbb{R}$. Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < |x|$, sodass

$$g(x) = g(x) - g(0) = g'(\xi)(x - 0) = g'(\xi) \cdot x.$$

Nun ist g' eine n -fach stetig differenzierbare Funktion, auf die sich die Induktionsannahme anwenden lässt. Da außerdem $\xi \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, gilt nach Annahme

$$g'(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^n) = \mathcal{O}(|x|^n) \quad \text{für } |\xi| < |x| \rightarrow 0.$$

Doch dies impliziert direkt das Resultat $g(x) = \mathcal{O}(|x|^{n+1})$ für $x \rightarrow 0$, was den Induktionsschritt abschließt.

- (b) Wir beweisen die Aussage mit Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. Für den Anfang $k = 0$ ist zu zeigen, dass

$$\left. \frac{d^j}{dx^j} 1 \right|_{x=0} = \mathbb{1}_{\{j=0\}}.$$

Dies ist wahr, da $1^{(j)} \equiv 0$ für alle $j > 0$. Für den Induktionsschritt gelte die Aussage für $k \geq 0$ und sei $f(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$. Sei zuerst $j = 0$. Dann ist $\frac{d^0}{dx^0} f(x) = f(x)$ und $f(0) = 0$. Sei also $j > 0$. Es gilt

$$\left. \frac{d^j}{dx^j} f(x) \right|_{x=0} = \left. \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} \frac{x^k}{k!} \right|_{x=0} \stackrel{\text{IV}}{=} \mathbb{1}_{\{k=j-1\}} = \mathbb{1}_{\{k+1=j\}},$$

was den Induktionsschritt abschließt.

(c) Mit f und g wie in der Angabe und $0 \leq j \leq n-1$ gilt

$$\begin{aligned} g^{(j)}(0) &= f^{(j)}(0) - \frac{d^j}{dx^j} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \Big|_{x=0} = f^{(j)}(0) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{d^j}{dx^j} \frac{x^k}{k!} \Big|_{x=0} \\ &\stackrel{(b)}{=} f^{(j)}(0) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \mathbf{1}_{\{k=j\}} = f^{(j)}(0) - f^{(j)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Linearität der Ableitung verwendet. Die Funktion g erfüllt also die Bedingungen aus Teilaufgabe (a) und es ist $g(x) = \mathcal{O}(|x|^n)$. Einsetzen in die Definition von g und Umstellen liefert das Ergebnis.

Aufgabe 3

(a) Wir setzen $x = \cos y$ und damit $y = \arccos x$. Wir betrachten $y \downarrow 0$ und damit $x \uparrow 1$. Es gilt

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{y^2}{2} + \mathcal{O}(y^4). \quad (1)$$

Dies lässt sich umformen zu $2 - 2x = y^2 + \mathcal{O}(y^4)$ und damit zu

$$\sqrt{2 - 2x} = \sqrt{y^2 + \mathcal{O}(y^4)} = y\sqrt{1 + \mathcal{O}(y^2)}.$$

Als Konsequenz von Lemma 1 gilt $\sqrt{1 + \mathcal{O}(y^2)} = 1 + \mathcal{O}(y^2)$ und wir erhalten

$$\sqrt{2 - 2x} = y + \mathcal{O}(y^3). \quad (2)$$

Aus (1) erhalten wir zudem $2(1-x) = y^2 + o(y^2)$. Für y klein genug ist $|o(y^2)| < y^2/2$ und damit

$$\frac{4}{3}(1-x) \leq y^2 \leq 4(1-x),$$

was uns $y = \mathcal{O}(\sqrt{1-x})$ gibt. Setzen wir nun dies in (2) ein, so erhalten wir

$$\sqrt{2 - 2x} = y + \mathcal{O}((1-x)^{3/2}).$$

Da $y = \arccos x$, ist die zu zeigende Aussage bewiesen.

(b) Der Beweis erfolgt komplett analog zu (a).

Aufgabe 4

(a) Mit $h(x) = \log(1+x)$ sehen wir, dass h für $x \rightarrow 0$ zweimal stetig differenzierbar ist, wobei $h'(x) = (1+x)^{-1}$ und $h''(x) = -(1+x)^{-2}$. Insbesondere lässt sich Teilaufgabe (c) von Aufgabe 2 anwenden und wir erhalten

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{1}{2}h''(0)x^2 + \mathcal{O}(|x|^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

(b) Da für $x \rightarrow 0$ auch $f(x) \rightarrow 0$, gilt

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= f(x) - \frac{1}{2}f(x)^2 + o(f(x)^2) \\ &= 2x + 3x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}(2x + o(x))^2 + o(x^2) = 2x + 3x^2 - 2x^2 + o(x^2) \\ &= 2x + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

(c) Es ist $h(x) = \arctan(x)$ dreimal stetig differenzierbar mit $h'(x) = (1+x^2)^{-1}$, $h''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$ und $h'''(x) = (6x^2 - 2)(1+x^2)^{-3}$. Auch hier wenden wir wieder Teil (c) von Aufgabe 2 an und erhalten für $x \rightarrow 0$

$$h(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^3) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Analog zu (b) ergibt sich für $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= f(x) - \frac{1}{3}(2x + o(x))^3 + o(f(x)^3) = 2x + 3x^2 + 4x^3 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= 2x + 3x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Wir zeigen die Aussage für *alle* glatten Funktionen f, g via Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar, denn

$$(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(-k)}.$$

Für den Induktionsschritt gelte die Aussage für $n \geq 0$. Es ist

$$(fg)^{(n+1)} = (f'g + g'f)^{(n)}.$$

Da sowohl f' als auch g' glatt sind, sind auch $f'g$ und $g'f$ glatt. Die Induktionsannahme lässt sich also auf diese beiden Funktionen anwenden und wir erhalten

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} (f')^{(k)} g^{(n-k)} + f^{(k)} (g')^{(n-k)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) \\ &= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

- (b) Wir beginnen mit einer Beobachtung. Sei dafür $n \in \mathbb{N}_0$, $k_m \in \mathbb{N}_0$ mit $k_m \leq n$ und $(k_1, \dots, k_{m-1}) \in M_{m-1, n-k_m}$. Dann ist $(k_1, \dots, k_m) \in M_{m, n}$ und außerdem

$$\binom{n}{k_m} \text{mult}(k_1, \dots, k_{m-1}) = \frac{n!}{(n-k_m)!k_m!} \cdot \frac{(n-k_m)!}{\prod_{j=1}^{m-1} k_j!} = \text{mult}(k_1, \dots, k_m). \quad (3)$$

Wir zeigen die Aussage nun via Induktion über $m \in \mathbb{N}$ und nutzen dabei Teilaufgabe (a). Den Induktionsanfang $m = 1$ ist klar. Sei nun $m > 1$ und gelte die Aussage für alle $l < m$. Wir definieren $g_m := \prod_{j=1}^{m-1} f_j$ und sehen, dass g_m als Produkt glatter Funktionen glatt ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^m f_j \right)^{(n)} &= (g_m \cdot f_m)^{(n)} \stackrel{(a)}{=} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} f_m^{(l)} g_m^{(n-l)} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \sum_{k_m=0}^n \binom{n}{k_m} f_m^{(k_m)} \cdot \left(\sum_{(k_1, \dots, k_{m-1}) \in M_{m-1, n-k_m}} \text{mult}(k_1, \dots, k_{m-1}) \prod_{j=1}^{m-1} f_j^{(k_j)} \right) \\ &= \sum_{k_m=0}^n \sum_{(k_1, \dots, k_{m-1}) \in M_{m-1, n-k_m}} \binom{n}{k_m} \text{mult}(k_1, \dots, k_{m-1}) f_m^{(k_m)} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} f_j^{(k_j)} \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{(k_1, \dots, k_m) \in M_{m, n}} \text{mult}(k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m f_j^{(k_j)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Es ist $B_0(x) = 1 = B_0$. Wir folgen dem Hinweis und nutzen die Teilaufgabe (c) aus Aufgabe 2 (nachdem wir uns überzeugt haben, dass sie hier anwendbar ist), um die asymptotische Form von $f_x(t)$ zu erhalten. Setzen wir diese in die Gleichung $(e^t - 1)f_x(t) = te^{xt}$ ein und schreiben die Exponentialfunktionen als Reihen aus, so erhalten wir aus

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) f_x(t) = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xt)^k}{k!}$$

die Darstellung

$$\left(\sum_{k=1}^4 \frac{t^k}{k!} + \mathcal{O}(t^5) \right) \left(\sum_{j=0}^3 \frac{B_j(x)}{j!} t^j + \mathcal{O}(t^4) \right) = \sum_{l=0}^3 \frac{x^l t^{l+1}}{l!} + \mathcal{O}(t^5)$$

für $t \rightarrow 0$. Multiplizieren wir nun die linke Seite aus und fassen nach Potenzen von t zusammen, so müssen die Koeffizienten vor t^k für alle $1 \leq k \leq 4$ auf linker und rechter Seite übereinstimmen (es sei vermerkt, dass auf der linken Seite alle nicht explizit ausgeschrieben Terme von Ordnung t^j mit $j \geq 5$ sind). Für $k = 2$ erhalten wir damit

$$\frac{1}{2}t^2 + B_1(x)t^2 = xt^2,$$

also $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$. Für $k = 3$ ergibt sich

$$\frac{1}{2}B_2(x)t^3 + \frac{1}{2}B_1(x)t^3 + \frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{2}x^2t^3,$$

also $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ und $B_2 = \frac{1}{6}$. Für $k = 4$ schließlich erhalten wir

$$\frac{1}{6}B_3(x)t^4 + \frac{1}{4}B_2(x)t^4 + \frac{1}{6}B_1(x)t^4 + \frac{1}{24}t^4 = \frac{1}{6}x^3t^4,$$

was aufgelöst $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ und $B_3 = 0$ ergibt.