

Lösungen zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2020/21

Aufgabe 1

a):

$$f'_1(x) = \ln x + 1 \quad (1)$$

b):

$$f'_2(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k \in \{1, \dots, n\} \\ k \neq j}} (x + 1 - k) \quad (2)$$

c):

$$f'_3(x) = \frac{d}{dx} e^{x^x \ln x} = \frac{d}{dx} e^{e^{x \ln x} \ln x} = x^{x^x} (x^{x-1} + x^x (1 + \ln x) \ln x) \quad (3)$$

d):

$$\begin{aligned} f'_4(\varphi) &= \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{(a + \cos \varphi)^2 + (b + \sin \varphi)^2}} - \frac{(a + \cos \varphi)((-\sin \varphi)(a + \cos \varphi) + \cos \varphi(b + \sin \varphi))}{\sqrt{(a + \cos \varphi)^2 + (b + \sin \varphi)^2}^3} \\ &= \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{(a + \cos \varphi)^2 + (b + \sin \varphi)^2}} - \frac{(a + \cos \varphi)(-a \sin \varphi + b \cos \varphi)}{\sqrt{(a + \cos \varphi)^2 + (b + \sin \varphi)^2}^3} \end{aligned} \quad (4)$$

e):

$$f'_5(x) = f_5(x) \frac{-x}{\sigma^2} \quad (5)$$

f):

$$f'_6(\sigma) = f_6(\varphi) \left(\frac{-1}{\sigma} + \frac{x^2}{\sigma^3} \right) \quad (6)$$

g):

$$f'_7(x) = \sqrt{2\pi} \frac{d}{dx} \sqrt{x} e^{x(\ln(x)-1)} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} + x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \ln(x) \right) \quad (7)$$

Aufgabe 2

Wir wissen bereits mit Satz 3.57, dass die Exponentialfunktion in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, es verbleibt also nur, die Stetigkeit in $\pm\infty$ zu zeigen. Per Definition der Konvergenz genügt es zu zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{Exp}(x) = \text{Exp}(\pm\infty)$. Für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\text{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty,$$

also auch $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$. Damit ist die Stetigkeit in $+\infty$ gezeigt. Zudem gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 = \text{Exp}(-\infty).$$

Aufgabe 3

- (a) ‘ $\Rightarrow$ ’ Sei $V \subseteq U$ offen in U . Wir zeigen, dass V dann auch offen in M ist. Nach Annahme gibt es eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{C}$, sodass $W \cap U = V$. Damit gilt

$$W \cap M = W \cap (U \cap M) = (W \cap U) \cap M = V \cap M,$$

es ist also $V \cap M$ offen in M . Der Beweis für $V \cap N$ erfolgt analog.

- ‘ $\Leftarrow$ ’ Sei $V \subseteq U$ so, dass offene Mengen $W', W'' \subseteq \mathbb{C}$ existieren mit $W' \cap M = V \cap M$ und $W'' \cap N = V \cap N$. Des Weiteren existieren abgeschlossene Mengen M', N' , sodass $U \cap A' = A$ für $A \in \{M, N\}$. Definiere

$$W := (W' \setminus N') \cup (W'' \setminus M') \cup (W' \cap W'').$$

Da N' (bzw. M') abgeschlossen ist, ist $W' \setminus N'$ (bzw. $W'' \setminus M'$) offen und damit W als Vereinigung dreier offener Mengen offen. Zudem gilt

$$\begin{aligned} U \cap W &= (M \cup N) \cap W = (M \cap W) \cup (N \cap W) \\ &= (M \cap (W' \setminus N')) \cup (M \cap (W' \cap W'')) \\ &\quad \cup (N \cap (W'' \setminus M')) \cup (N \cap (W' \cap W'')) \\ &\stackrel{(*)}{=} ((M \cap V) \setminus N) \cup ((M \cap V) \cap W'') \cup ((N \cap V) \setminus M') \cup ((N \cap V) \cap W') \\ &\stackrel{(**)}{=} ((M \cap V) \setminus N) \cup ((M \cap V) \cap (W'' \cap N)) \cup ((N \cap V) \setminus M') \cup ((N \cap V) \cap (W' \cap M)) \\ &= ((M \cap V) \setminus N) \cup ((M \cap V) \cap N) \cup ((N \cap V) \setminus M') \cup ((N \cap V) \cap M) \\ &= (V \cap M) \cup (V \cap N) = V \cap (M \cup N) \\ &= V \cap U, \end{aligned}$$

womit V offen in U ist. Hierbei wurde in $(*)$ verwendet, dass N und N' (bzw. M und M') auf U übereinstimmen. Für $(**)$ hingegen sehen wir, dass wir W'' mit N schneiden können, da die nicht in N enthaltene Menge auch in $(M \cap V) \setminus N$ enthalten ist (analog können wir W' mit M schneiden).

- (b) Sei $W \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f|_A$ die Einschränkung von f auf $A \subseteq U$. Nach Annahme sind $f|_M^{-1}[W]$ sowie $f|_N^{-1}[W]$ offene Mengen und damit insbesondere offen in U . Des Weiteren ist $f|_A^{-1}[W] = f^{-1}[W] \cap A$ für $A \in \{M, N\}$.

Nach Teilaufgabe (a) ist damit jedoch auch $f^{-1}[W]$ offen in U , womit die Stetigkeit von f gezeigt ist.

- (c) Wir zeigen, dass f folgenstetig ist. Sei dafür $x \in U$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Aufgrund der Überdeckungseigenschaft gibt es einen Index $j \in I$, sodass $x \in M_j$. Da M_j offen ist, ist x ein innerer Punkt und es existiert $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq M_j$. Aufgrund der Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es außerdem $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \in U_\varepsilon(x) \subseteq M_j$ für alle $n \geq N$.

Da f stetig und insbesondere folgenstetig auf M_j ist, konvergiert die Folge $(f(a_n))_{n \geq N}$ gegen $f(x)$, womit aber auch $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Die Funktion f ist also folgenstetig in x und damit stetig in x .

Die Folgerung über Aussage (b) ergibt sich, da die offenen Mengen N, M eine Überdeckung von U bilden und (c) angewendet werden kann.

(d) Es ist

$$f \wedge g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M, \\ g(x) & \text{falls } x \in N. \end{cases}$$

Es ist also $f \wedge g$ auf den Einschränkungen N und M stetig, es gilt $N \cup M = U$ und M als auch N sind als Urbilder (in $\mathbb{R}$) abgeschlossener Mengen unter der stetigen Funktion $f - g$ abgeschlossen in U . Wir können also (b) anwenden und zeigen, dass $f \wedge g$ stetig ist.

Aufgabe 4

Es gilt

$$\cot(x) = i \cdot \frac{1 + e^{-2ix}}{1 - e^{-2ix}}.$$

Zudem gilt

$$1 + e^{-x} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 2 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{-x}} &= \frac{1}{x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-(-x)^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^k = \frac{1}{x} \left(\underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}_{k=1} + \underbrace{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}_{k=2} + \underbrace{o(x^2)}_{k>2} \right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + o(x), \end{aligned}$$

wobei wir für $|x|$ klein genug die geometrische Reihe benutzt haben.

Insgesamt haben wir also also

$$\begin{aligned} \cot(x) &= (2i + 2x - 2ix^2 + o(x^2)) \left(\frac{1}{2ix} + \frac{1}{2} + \frac{2ix}{12} + o(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} + i - \frac{x}{3} + o(x) - i + x + o(x) - x + o(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a): Wir zeigen zuerst Wohldefiniertheit von g . Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in U$

$$|g_k(x)| \leq \sum_{n=1}^k |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in U} |f_n(x)| < \infty. \quad (8)$$

Nun zur Stetigkeit, wir zeigen Folgenstetigkeit: Sei also $(x_l)_{l \in \mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{l \rightarrow \infty} x_l = x_0$ gegeben. Weil alle Funktionen f_n stetig in x_0 sind und die Majorante $(\sup_{x \in U} |f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar ist, können wir den Satz der dominierten Konvergenz anwenden. Damit ergibt sich

$$g(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lim_{l \rightarrow \infty} x_l) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{l \rightarrow \infty} f_n(x_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} g(x_l). \quad (9)$$

□

b): Alle in der Aufgabenstellung vorkommenden Reihen konvergieren absolut. Wir können daher Reihen nach Belieben umordnen. Wir setzen den Differenzenquotienten an und zeigen, dass dieser konvergiert. Seien also $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen $h > 0$ so klein, dass für alle $a \in [x, x+h]$ sowohl $|\cos(na) - \cos(nx)| < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\zeta(2)}$ als auch $|\sin(na) - \sin(nx)| < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\zeta(2)}$ für alle $n \leq N$ gilt. Diese Wahl ist aufgrund der Stetigkeit von Sinus und Kosinus immer möglich. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz für jedes $n \in \mathbb{N}$ Werte $\xi_1(n), \xi_2(n) \in [x, x+h]$ sodass

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in(x+h)}}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^3}}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in(x+h)} - e^{inx}}{hn^3} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n(x+h)) - \cos(nx)}{hn^3} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(x+h)) - \sin(nx)}{hn^3} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(n\xi_1(n))}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\xi_2(n))}{n^2} \end{aligned} \quad (10)$$

gilt. Damit gilt also für den Abstand vom Differenzenquotienten zur in der Aufgabenstellung gegebenen Ableitung

$$\begin{aligned} \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| &= \left| i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(in\xi_1(n))}{n^2} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in\xi_2(n))}{n^2} \right| \leq \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx) - \cos(n\xi_2(n))|}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx) - \sin(n\xi_1(n))|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{3n^2\zeta(2)} + \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{3n^2\zeta(2)} + \\ &\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\cos(nx) - \cos(n\xi_2(n))|}{n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\sin(nx) - \sin(n\xi_1(n))|}{n^2} < \varepsilon, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei die letzte Ungleichung für $N = N(\varepsilon)$ hinreichend groß gilt. Insgesamt gilt also $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. □

Aufgabe 6

Wir beginnen mit einem Hilfslemma.

Lemma 1. Sei $f : \mathbb{R} \supseteq A \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar gegeben. Es gilt

$$\forall x \in A : f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ ist streng monoton steigend.} \quad (12)$$

Beweis: Sei f wie in der Voraussetzung des Lemmas gegeben. Nehme an, dass für alle $x \in A$, $f'(x) > 0$ ist. Seien außerdem $x, y \in A$ mit $x > y$ gegeben. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in]y, x[$, sodass

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) > 0 \quad (13)$$

gilt. Also ist $f(x) > f(y)$ und damit ist f streng monoton steigend.

a): Weil $f'_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$ für alle x im Definitionsbereich gilt, ist f'_1 streng monoton steigend und damit auf seiner Bildmenge invertierbar. Sei $y \in \mathbb{R}^+$ gegeben, dann gilt

$$\cosh \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 1} + \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}}{2} = \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1}}{2(y + \sqrt{y^2 - 1})} = y. \quad (14)$$

Das war zu zeigen. Nun zu den Ableitungen, wir berechnen zuerst für $y \in]1, \infty[$ direkt

$$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad (15)$$

und anschließend mit der Formel zur Ableitung von Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh}'(y) &= \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arccosh}(y))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{arccosh}(y))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \end{aligned} \quad (16)$$

Die beiden Ergebnisse stimmen überein.

b): Für $y \in \mathbb{R}$ ergibt die direkte Rechnung

$$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \quad (17)$$

und die Rechnung über die Formel der Ableitung einer Umkehrfunktion ergibt

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsinh}'(y) &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arcsinh}(y))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{arcsinh}(y))^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Ergebnisse stimmen also wieder überein.

- c): Wir berechnen wieder die Ableitung um strenge Monotonie zu zeigen. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2(x) > 0, \quad (19)$$

weil, wie in der Aufgabenstellung angegeben, $\tanh < 1$ ist. Damit ist auch $\tanh$ injektiv. Sei $y \in]0, 1[$, dann gilt

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) = \frac{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}}{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}} = \frac{\sqrt{(1+y)^2} - \sqrt{(1-y)^2}}{\sqrt{(1+y)^2} + \sqrt{(1-y)^2}} = y. \quad (20)$$

Nun zu den Ableitungen, sei $y \in]-1, 1[$ dann ergibt sich durch direkte Rechnung

$$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{2} \frac{1-y}{1+y} \frac{1-y+1+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{1-y^2} \quad (21)$$

durch Verwendung der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion ergibt sich

$$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{arctanh}(y))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{arctanh}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}. \quad (22)$$

Die beiden Ergebnisse stimmen also wieder überein.

- d): Wir berechnen wieder die Ableitung um strenge Monotonie zu zeigen. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\coth'(x) = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = 1 - \tanh^2(x) < 0, \quad (23)$$

weil $\coth' < 0$ ist, ist also $-\coth' > 0$ und damit streng monoton steigend. Daraus folgt, dass $\coth'$ streng monoton fallend und damit injektiv ist. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben, dann gilt

$$\coth\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\right) = \frac{\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} + \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} - \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}} = \frac{\sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y-1)^2}}{\sqrt{(y+1)^2} - \sqrt{(y-1)^2}} = y. \quad (24)$$

Für ein gegebenes $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ ergibt die direkte Berechnung der Ableitung

$$\operatorname{arcoth}'(y) = \frac{1}{2} \frac{y-1}{y+1} \frac{y-1-y-1}{(y-1)^2} = \frac{1}{1-y^2} \quad (25)$$

und die Berechnung über die Formel der Ableitung einer Umkehrfunktion ergibt

$$\operatorname{arcoth}'(y) = \frac{1}{\coth'(\operatorname{arcoth}(y))} = \frac{1}{1 - \coth^2(\operatorname{arcoth}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}. \quad (26)$$

Die beiden Ergebnisse stimmen wieder überein. $\square$