§ 4 Das Vollständigkeitsaxiom und irrationale Zahlen

In diesem Paragraphen werden wir zum ersten Mal die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwenden. Dies wird uns ermöglichen zu zeigen:

(i) $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, d.h. es gibt irrationale Zahlen (siehe 4.7);

(ii) $\sqrt{2}$ existiert, d.h. es gibt eine positive reelle Zahl, deren Quadrat 2 ist (siehe 4.7);

(iii) $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet, d.h. jede reelle Zahl wird von einer natürlichen Zahl überboten (siehe 4.2).

Mit der Benutzung des Vollständigkeitsaxioms beginnt die eigentliche Analysis.

4.1 Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ sei nach oben beschränkt. Ist dann $c \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$, so gilt:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq c \Rightarrow n \leq c-1.$$

Mit c ist also auch $c-1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Daher besitzt $\mathbb{N}$ keine kleinste obere Schranke, im Widerspruch zur Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$. Unsere Annahme ist daher falsch, d.h. $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt. □

Der folgende Satz wird sowohl nach dem Griechen Eudoxos (408–355 v.Chr.) als auch nach dem Griechen Archimedes (287–212 v. Chr.) benannt.

4.2 $\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet

Zu $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$. Angeordnete Körper mit dieser Eigenschaft heißen *archimedisch geordnet*.

Beweis. Da $\mathbb{N}$ nach 4.1 nicht nach oben beschränkt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b}{a}$. Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit $0 < a$ folgt $na > b$. □

4.3 $\mathbb{R}$ enthält keine infinitesimalen Elemente ungleich Null

(i) Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$.

(ii) Ein Element a eines angeordneten Körpers heißt *infinitesimal*, wenn $|a| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Es gilt:

$\mathbb{R}$ enthält keine von Null verschiedenen infinitesimalen Elemente.

Beweis. ***(i)*** Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $b := 1$ existiert nach 4.2 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1 < n_0\varepsilon$. Aus $n > n_0 > 0$ folgt $\frac{1}{n} \underset{2.3(\mathrm{x})}{<} \frac{1}{n_0} \underset{2.3(\mathrm{xi})}{<} \varepsilon$.

(ii) Ist $a \neq 0$, so ist $|a| \in \mathbb{R}_+$ nach 2.7(i). Also ist $\frac{1}{n_0} < |a|$ nach (i) für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$. Daher kann a nicht infinitesimal sein. □

Die von Gauß (1777–1855) eingeführte „Klammer“ ist für viele Zwecke der Analysis und Zahlentheorie nützlich.

4.4 Gauß-Klammer

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann besitzt $\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$ ein Maximum. Es heißt

$$[a] := \max(\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\})$$

die *Gauß-Klammer* von a. Es ist $[a] \in \mathbb{Z}$, und zwar die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$a = [a] + r \text{ und } 0 \leq r < 1.$$

Insbesondere ist: $[a] \leq a < [a] + 1$.

Beweis. Nach 4.2 existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a| < m_0$. Also ist $-m_0 \underset{2.9(\mathrm{i})}{\in} A := \{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\} \subset \{k \in \mathbb{Z} : k \leq m_0\}$. Daher besitzt A nach 3.33(ii) ein Maximum. Nach Definition gilt dann $[a] \leq a < [a]+1$. Setze $r := a - [a]$. Dann ist also $0 \leq r < 1$ und $a = [a] + r$. Seien $a = k_i + r_i$ zwei Darstellungen mit $k_i \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r_i < 1$. Ist etwa $k_1 < k_2$, so gilt: $0 < k_2 - k_1 = r_1 - r_2 \leq r_1 < 1$ mit Widerspruch zu $k_2 - k_1 \in \mathbb{Z}$ (benutze 3.4 und 3.12(ii)). □

4.5 $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets eine rationale Zahl.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Gesucht sind $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mit $a < m/n < b$, d.h. mit

(1) $$na < m < nb.$$

Um (1) zu beweisen, wähle zunächst $n \in \mathbb{N}$ mit

(2) $$n(b-a) > 1.$$

Wegen $b-a \in \mathbb{R}_+$ ist dies möglich (siehe 4.2). Nach 4.4 folgt mit $m := [na]+1 \in \mathbb{Z}$ nun (1) aus:

$$na < m \leq na + 1 \underset{(2)}{<} nb. \qquad \square$$

Nach 4.5 liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Bisher wäre aber $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ durchaus denkbar, und 4.5 wäre dann trivial. Es stellt sich also die Frage: Ist $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, d.h. da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist, gibt es irrationale Zahlen im Sinne der folgenden Definition?

4.6 Irrationale Zahlen

Die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen *irrationale Zahlen*.

Als Kandidat für eine irrationale Zahl kommt „$\sqrt{2}$“ in Frage. Nach 3.37 ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl, d.h. es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist. Nachzuweisen bleibt daher die Existenz einer reellen Zahl, deren Quadrat 2 ist. Eine solche Zahl ist dann eine irrationale Zahl. Die Existenz einer solchen Zahl sichert nun der folgende Satz. Er zeigt also insbesondere, daß es irrationale Zahlen gibt.

4.7 Existenz von Wurzeln nicht-negativer reeller Zahlen

Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sei d eine nicht-negative reelle Zahl. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte nicht-negative reelle Zahl c mit $c^n = d$.

Dieses c heißt die *n-te Wurzel* von d und wird mit $\sqrt[n]{d}$ bezeichnet. Statt $\sqrt[2]{d}$ schreibt man auch nur $\sqrt{d}$.

Beweis. Ist $d = 0$, so ist $c := 0$ die eindeutig bestimmte Lösung von $c^n = 0$. Sei also im folgenden $d \in \mathbb{R}_+$.
Zur Eindeutigkeit von c : Angenommen, c_1, c_2 seien zwei verschiedene nicht-negative reelle Zahlen mit

(1) $$c_1^n = d = c_2^n \text{ und o.B.d.A. } c_1 < c_2.$$

Wegen $d \in \mathbb{R}_+$ und $c_1 \geq 0$ gilt dann $0 < c_1 \underset{(1)}{<} c_2$ und somit $c_1^n \underset{3.11(\text{vi})}{<} c_2^n$, im Widerspruch zu (1).

Zur Existenz von c : Setze $\mathbb{R}^{\geq 0} := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$. Zum Nachweis der Existenz betrachte

$$T := \{t \in \mathbb{R}^{\geq 0} : t^n > d\}.$$

T ist durch 0 nach unten beschränkt. T ist auch nicht-leer, da es nach 4.2 ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > d$ und somit $k^n \geq k > d$ gibt. Also existiert (siehe 1.8)

(2) $$c := \inf(T) \in \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

Wir zeigen später:

(3) $$c^n > d \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \text{ mit } c - 1/k > 0 \text{ und } (c-1/k)^n > d;$$

(4) $$c^n < d \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \text{ mit } (c+1/k)^n < d.$$

(3) und (4) liefern auf folgende Weise, daß $c^n < d$ und $c^n > d$ nicht möglich sind, also $c^n = d$ sein muß:
Aus $c^n < d$ folgte $(c+1/k)^n \underset{(4)}{<} d < t^n$ für alle $t \in T$. Da $0 < c+1/k, t$ sind, folgte $c+1/k < t$ für alle $t \in T$. Also wäre $c+1/k$ ebenfalls eine untere Schranke von T, was (2) widerspricht (siehe 1.16(ii)(2)).

Aus $c^n > d$ folgte $c - 1/k \in T$ nach (3). Dies ist ein Widerspruch, da c nach (2) eine untere Schranke von T ist.

Zu (3): Sei also $c^n > d$. Sei ferner $m \in \mathbb{N}$ und $m > 1/c$. Dann ist

(5) $$c - 1/m > 0, \quad t := -\frac{1}{mc} \geq -1,$$

und aus der Bernoullischen Ungleichung 3.9 folgt:

(6) $$(c-1/m)^n = c^n(1-1/mc)^n \underset{3.9}{\geq} c^n(1-n/mc).$$

Nun gilt für solche m:

(7) $$\begin{aligned} c^n(1-n/mc) > d \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - n/mc > d/c^n \Longleftrightarrow (c^n - d)/c^n > n/mc \\ &\Longleftrightarrow \quad m > n \cdot c^n / c(c^n - d). \end{aligned}$$

Wählt man nun $k \in \mathbb{N}$ nach 4.2 mit $k > \max(\{1/c, nc^n/c(c^n-d)\})$, so folgt $c - 1/k > 0$ nach (5) und $(c-1/k)^n > d$ nach (6) und (7).

Zu (4): Für $m \in \mathbb{N}$ ist (wende 3.19 an auf $a := \frac{1}{m}, b := c$):

(8) $$\begin{aligned} (c+1/m)^n \quad &\underset{3.19}{=} \quad c^n + \frac{1}{m}\binom{n}{1}c^{n-1} + \frac{1}{m^2}\binom{n}{2}c^{n-2} + \ldots + \frac{1}{m^n}\binom{n}{n} \\ &\leq \quad c^n + \frac{1}{m}\underbrace{\left(\binom{n}{1}c^{n-1} + \binom{n}{2}c^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\right)}_{=:s} \\ &= \quad c^n + s/m. \end{aligned}$$

Es ist $s > 0$ und nach Voraussetzung $d - c^n > 0$. Also ist $(d - c^n)/s > 0$. Es existiert nach 4.2 daher ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k(d-c^n)/s > 1$, d.h. mit $1/k < (d-c^n)/s$. Also folgt aus (8):

$$(c+1/k)^n \leq c^n + s/k < c^n + (d - c^n) = d. \qquad \square$$

Was unterscheidet nun $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$? $\mathbb{Q}$ ist nach 3.13(iii) wie $\mathbb{R}$ ein Körper. $\mathbb{Q}$ ist offenbar ein angeordneter Körper, da $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist. $\mathbb{Q}$ ist archimedisch, d.h. zu $a \in \mathbb{Q}_+, b \in \mathbb{Q}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$, da $\mathbb{R}$ archimedisch ist. Es gibt in der Tat viele Körper K mit $\mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} K \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}$, die aus denselben Gründen alle archimedisch geordnete Körper sind. Solche Zwischenkörper sind besonders für die Algebra von Interesse. Aber weder $\mathbb{Q}$ noch einer dieser Zwischenkörper kann vollständig sein. Denn es gilt:

4.8 Es gibt keinen von $\mathbb{R}$ verschiedenen ordnungsvollständigen Teilkörper von $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei K ein ordnungsvollständiger Teilkörper von $\mathbb{R}$. Nach 3.13(iii) ist

(1) $$\mathbb{Q} \subset K.$$

Da $K \subset \mathbb{R}$ ist, reicht es, $\mathbb{R} \subset K$ zu zeigen. Sei hierzu $r \in \mathbb{R}$. Setze

(2) $$T := \{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\}.$$

Es reicht zu zeigen:

(3) $\sup_K(T)$, d.h. das Supremum von T in K existiert;

(4) $$\sup_K(T) = r.$$

Man beachte bei der Bezeichnung $\sup_K(T)$, daß das Supremum einer Menge T nach 1.6 in der Regel von der T umfassenden Menge K abhängt.

Zu (3): Da K als ordnungsvollständig vorausgesetzt ist, ist zu zeigen:

(5) T ist nicht leer;

(6) T ist in K nach oben beschränkt.

Zu $r-1$ und r gibt es nach 4.5 ein $q' \in \mathbb{Q}$ mit $r-1 < q' < r$, also ist $q' \in T$, d.h. (5) gilt.

Zu r und $r+1$ gibt es nach 4.5 ein $q \in \mathbb{Q} \underset{(1)}{\subset} K$ mit $r < q < r+1$, also ist $q \in K$ eine obere Schranke von T.

Zu (4): Wir führen $\sup_K(T) < r$ bzw. $> r$ zu einem Widerspruch.
Sei $\sup_K(T) < r$. Dann gibt es nach 4.5 ein $q \in \mathbb{Q} \underset{(1)}{\subset} K$ mit $\sup_K(T) < q < r$. Also ist $q \in T$ mit Widerspruch zu $q \leq \sup_K(T)$.

Sei nun $r < \sup_K(T)$. Dann gibt es nach 4.5 ein $q \in \mathbb{Q} \underset{(1)}{\subset} K$ mit $r < q < \sup_K(T)$. Also ist q keine obere Schranke von T, d.h. es gibt ein $t \in T$ mit $q < t$. Wegen $t \in T$ ist $q \leq r$, im Widerspruch zu $r < q$. □

4.9 Für jede reelle Zahl r gilt:

$$r = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\}$$

Beweis. Betrachte $K = \mathbb{R}$ im Beweis von 4.8. Die Aussage folgt dann aus Gleichung (4) des Beweises zu 4.8. □

Mit 4.7 ist es nun möglich, a^r für alle $r \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}_+$ zu definieren. Dies geschieht in 4.10. Die Eigenschaften von $r \to a^r$ untersuchen wir später in allgemeinerem Zusammenhang.

4.10 a^r für $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Q}$

Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Z}$ war a^r schon definiert. Sei $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, dann gibt es eindeutig bestimmte $m \in \mathbb{Z}, 2 \leq n \in \mathbb{N}$, die teilerfremd sind mit $r = \frac{m}{n}$. Setze

$$a^r := \sqrt[n]{a^m}.$$

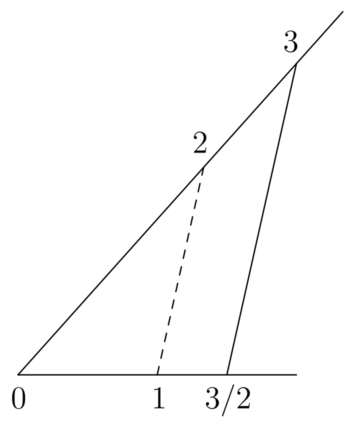
Die reellen Zahlen werden oft als Punkte auf der Zahlengerade veranschaulicht. Wenn auch solche geometrischen Veranschaulichungen nicht als Beweismittel zugelassen sind, so dienen sie doch vielfältigen Zwecken:

1) Sie führen zu Vermutungen über Beziehungen zwischen reellen Zahlen; d.h. sie legen Aussagen nahe, die dann allerdings noch bewiesen werden müssen.
2) Sie geben manchmal Hinweise auf Beweismöglichkeiten über reelle Zahlen.
3) Schon bewiesene Aussagen lassen sich durch die geometrische Veranschaulichung besser behalten.

Bei der Veranschaulichung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden geht man folgendermaßen vor:
Man zeichnet auf der Geraden einen Punkt als Nullpunkt aus, d.h. als den Punkt, wo die Zahl Null steht.

Da $a < b$ veranschaulicht werden soll durch „a liegt links von b“ (genauer die zu a und b gehörigen Punkte), muß wegen $0 < 1$ insbesondere 1 rechts von 0 gewählt werden. Sind nun der Nullpunkt und der Einheitspunkt gewählt, so erhält man $n \in \mathbb{N}$ durch n-maliges Abtragen der Einheitsstrecke nach rechts.

Zahlen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ konstruiere man mit Hilfe des Strahlensatzes, etwa 3/2 durch:



Damit erhält man dann — durch Spiegelung am Nullpunkt — auch alle negativen rationalen Zahlen und somit insgesamt alle rationalen Zahlen.
$\sqrt{2}$ ist z.B. ebenfalls elementar mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Konstruiere das Quadrat mit Seitenlänge 1 und schlage um den Nullpunkt einen Kreis mit dem Radius der Diagonale des Quadrats. Dort, wo dieser Kreis die positive Achse schneidet, liegt $\sqrt{2}$.

Dies führt zu der in der Algebra präzisierbaren und beantwortbaren Frage: Welche Punkte der Zahlengerade sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Hiermit hängen drei der ältesten (einer Präzisierung bedürftigen) Fragen der Mathematik zusammen, nämlich nach

a) der Quadratur des Kreises,

b) der Winkeldreiteilung,

c) der Würfelverdoppelung.

Generell denkt man sich jedoch die gesamte Menge der Punkte der Zahlengeraden bijektiv auf die Menge der reellen Zahlen abgebildet, und zwar so, daß genau dann $a < b$ ist, wenn der zu a gehörige Punkt links von dem zu b gehörigen Punkt liegt. Eine genauere Begründung hierfür wird in den Grundlagen der Geometrie gegeben. Dies ist ein Bereich der Geometrie, der seinen Ursprung in dem berühmten Buch von Hilbert „Grundlagen der Geometrie" aus dem Jahre 1899 hat.

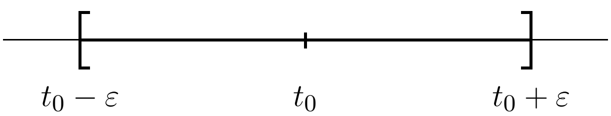
Als Einführung in diesen Bereich, der mit der Analysis jedoch nur wenig Berührungspunkte hat, sei empfohlen das Buch von Ernst Kunz: Ebene Geometrie (Grundlagen der Geometrie), Grundkurs Mathematik, Vieweg 1976.

Deutet man nun einige der bisher erzielten Ergebnisse auf diese Weise an der Zahlengeraden, so sagt z.B.

– 4.2: Hat man einen Punkt a, der rechts vom Nullpunkt liegt, und einen beliebigen weiteren Punkt b, so gelangt man durch genügend oftmaliges Abtragen der Strecke mit den Endpunkten 0 und a zu einem Punkt rechts von b.

– 4.5: Zwischen je zwei verschiedenen Punkten der Zahlengeraden liegt immer ein rationaler Punkt, insbesondere also ein Punkt, der mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

– 2.9(iii): Die Menge der Punkte $\{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \varepsilon\}$ ist ein um t_0 symmetrisches Intervall:



Wegen dieser Veranschaulichungsmöglichkeit werden wir die reellen Zahlen (d.h. die Elemente von $\mathbb{R}$) auch *Punkte von* $\mathbb{R}$ nennen.

Ergänzung: [1]

In § 3 hatten wir bei der Konstruktion von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ nur benötigt, daß $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper K ist. Daher lassen sich, wenn man $\mathbb{R}$ durch K ersetzt, entsprechend $\mathbb{N}_K, \mathbb{Z}_K, \mathbb{Q}_K$ definieren. Der Zusammenhang zwischen diesen Bereichen ist der folgende:

[1] In den *Ergänzungen* zu einzelnen Paragraphen werden in der Regel keine Beweise gegeben, die Resultate aber im weiteren Verlauf der Vorlesung auch nicht für Beweise verwandt werden.

Man bezeichne das Nullelement in K mit 0_K, das Einselement mit 1_K. Setze dann induktiv für $n \in \mathbb{N}$ fest: $(n+1)_K := n_K + 1_K$. Setzt man für $-n$ mit $n \in \mathbb{N}$ dann $(-n)_K := -(n_K)$ und für $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$(\tfrac{m}{n})_K := \tfrac{m_K}{n_K},$$

so ist $\mathbb{Q} \ni q \xrightarrow{i} q_K \in \mathbb{Q}_K$ ein Isomorphismus, d.h. eine bijektive Abbildung, so daß für $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$i(r+s) = i(r) + i(s), \quad i(r \cdot s) = i(r) \cdot i(s), \quad r \leq s \Longleftrightarrow i(r) \leq i(s).$$

$\mathbb{Q}_K$ ist also bis auf Isomorphie gleich $\mathbb{Q}$. Man kann daher $\mathbb{Q}$ als Teilkörper jedes angeordneten Körpers ansehen.

Ist nun K archimedisch geordnet, so ist

$$K \ni k \to \sup_{\mathbb{R}}\{q \in \mathbb{Q} : q \leq k\} \in \mathbb{R}$$

eine injektive Abbildung von K in $\mathbb{R}$, die nun für $r, s \in K$ wieder die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$i(r+s) = i(r) + i(s), \quad i(r \cdot s) = i(r) \cdot i(s), \quad r \leq s \Longleftrightarrow i(r) \leq i(s),$$

und für die ferner $i(q) = q$ für $q \in \mathbb{Q}$ gilt.

Man kann daher auch jeden archimedisch geordneten Körper als Teilkörper von $\mathbb{R}$ auffassen. Ist K vollständig, so ist diese Abbildung auch surjektiv. (Dies entspricht dem Satz 1.15(ii)).