Vertauschen von Limiten

W. Herfort

December 28, 2005

Contents

In der Hoffnung, hier gemeinschaftliche Aspekte des Vertauschens von Integration und Bilden von uneigentlichen Integralen zu bringen, zitiere ich Satz 1 (aus ANA 2) und versuche zu zeigen, wie Satz 1 in recht unterschiedlichen Situationen zumindest "in Richtung Lösung zeigt".

1 Die Mutter aller Schlachten

Satz 1 *(Ana 2 Skriptum Seite 108) Es seien (M_i, d_i) für $i = 1, 2$ und (M, d) metrische Räume, sowie (M, d) vollständig. Es sei $f : M_1 \times M_2 \to M$ eine Funktion. Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

zumindest dann wenn die folgenden Voraussetzungen gelten:

1. *Die "inneren" Grenzwerte $\lim_{y \to y_0} f(x, y)$ und $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$ existieren für alle $x \in M_1$ bzw. $y \in M_2$;*
2. *mindestens einer der GW ist gleichmäßig bezüglich der festgehaltenen Variablen;*

2 Anwendungen in Beispielen

2.1 Vertauschen von GW in ANA 2

2.1.1 Aufgabe

Man zeige

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{1}{1 + x^2 \frac{\sin y}{y}} = 1.$$

2.1.2 Lösung

Es erscheint ein wenig einfacher,

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + x^2 \frac{\sin y}{y}} = \lim_{y \to 0} 1 = 1$$

zu berechnen, und deshalb erweist sich die Anwendung des obigen Satzes in folgender Weise als sinnvoll:

- Wählen $M_1 := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und d_1 sei die euklidische Metrik, d.h. $d_1(x, x') := |x - x'|$. Desgleichen sei $M_2 = M_1$ und $d_2 := d_1$. Schließlich sei $M := I\!R$ mit der euklidischen Metrik (ist vollständig).

- Die Existenz der inneren Limiten

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2\frac{\sin y}{y}} = 1, \quad \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+x^2\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1+x^2}$$

  ist gesichert.

  (Zugegeben, hier wird der GW bei $y \to 0$ "ausgerechnet", sodaß es eigentlich nicht so klar ist, warum der eingeschlagene Weg der "einfachere" sein soll!)

- Es erscheint zweckmäßig, die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bei $x \to 0$ für alle $y \in M_1$ zu untersuchen, weil die involvierten "kleinen Rechnereien" etwas einfacher sind.

  Es genügt, zu jedem $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ ein $0 < \delta < \frac{1}{2}$ zu garantieren, derart daß für alle $y \in M_1$

$$\left| \frac{1}{1+x^2\frac{\sin y}{y}} - 1 \right| < \epsilon$$

  falls

$$|x| < \delta$$

  gilt.

  Als vorbereitende Abschätzung ergibt sich wegen $\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leq 1$ (als Konsequenz d. MWS der DR, nämlich $|\sin x - \sin 0| \leq |x| \ \sup_{t\in(0,x)} |\cos t| \leq |x|$) die Kette von Abschätzungen

$$\left| \frac{1}{1+x^2\frac{\sin y}{y}} - 1 \right| \leq \frac{x^2}{1-x^2} \leq \frac{4}{3}|x|$$

  ergibt, sodaß bei gegebenem ϵ man $\delta := \frac{3}{4}\epsilon$ wählen kann.

2.2 Vertauschung von GW bei Folgen von Funktionen: ANA 2

2.2.1 Aufgabe

Man zeige $\lim_{a\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3a}{n^2} = 1$.

2.2.2 Lösung

Keine schwierige Rechnung auf direktem Weg. Könnte man die Limiten vertauschen, ergibt sich sogar noch etwas einfacher

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{a\to 0} \frac{n^2+3a}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

- Es sei $M_1 := I\!N \cup \{\infty\}$ und als Metrik wählen wir $d_1(m,n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ falls, $m, n \in I\!N$ und $d_1(m,\infty) := \frac{1}{m}$, falls $m \in I\!N$ ist. (Es ist vereinbart, daß $0 \notin I\!N$.) Es ist klar, daß diese DN Anlaß zu einer Metrik auf M_1 gibt. Der Grund dafür, ∞ in den Raum einzubeziehen liegt darin, daß in Satz 1 die Elemente x_0 bzw. y_0 tatsächlich Elemente eines entsprechenden metrischen Raums sind und nicht bloß "Symbole" für uneigentliche Grenzübergänge.

  Weiters sei $M_2 := [-1, 1]$ versehen mit der euklidischen Metrik. Schließlich sei $M := I\!R$ und d die euklidische Metrik. Es ist M vollständig.

- Die Existenz der inneren Limiten ist recht einfach einzusehen.

- Um nun (beispielhalber) zu prüfen, daß der GW bei $n \to \infty$ gleichmäßig auf ganz M_2 gilt, hat man bei gegebenem positiven ϵ ein $\delta \geq 0$ anzugeben, sodaß
$$\left|\frac{n^2 + 3a}{n^2} - 1\right| < \epsilon$$
  für alle n mit $d_1(n,\infty) < \delta$ und alle $a \in M_2$ gilt.

  Dies zu bewerkstelligen, läuft darauf hinaus,
$$\left|\frac{n^2 + 3a}{n^2} - 1\right| = \left|\frac{3a}{n^2}\right| \leq \frac{3}{n} = 3d_1(n,\infty)$$
  benützend, als δ den Wert $\frac{\epsilon}{3}$ zu wählen.

- Überflüssigerweise sei hier die Frage gestellt, ob $a \to 0$ auch gleichmäßig für alle $n \in M_1$ ist. Dann müßte zu jedem positivem ϵ ein $\delta \geq 0$ angebbar sein, sodaß
$$\left|\frac{n^2 + 3a}{n^2} - 1\right| < \epsilon$$
  für alle $n \in M_1$ und $|a| < \delta$ ist. Allerdings ist der Ausdruck
$$\frac{n^2 + 3a}{n^2}$$
  nicht für alle $n \in M_1$ nicht definiert. Für $n = \infty$ müßte man ihn (geschickterweise) durch "1" festlegen. Danach läßt sich Satz 1 auch in dieser Form benützen.

2.3 Vertauschung von Differentiation und Grenzwert

2.3.1 Aufgabe

Man zeige für beliebiges reelles x daß $\lim_{a\to 0}(\arctan ax)' = 0$, wobei $'$ Differentiation nach x bedeutet.

2.3.2 Lösung

Wüßte man, daß man Differentiation und GW vertauschen darf, wäre die Antwort sofort klar, nämlich 0. Natürlich ist das auch klar durch direktes "Nachrechnen".

Hier eine systematische Ausarbeitung, das Vertauschen betreffend:

- Zunächst sei $x \in I\!R$ festgehalten. Dann entsteht durch Bezugnahme auf die DN des Differenzierens die Frage, ob

  $$\lim_{a\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\arctan a(x+h)-\arctan ax}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{a\to 0}\frac{\arctan a(x+h)-\arctan ax}{h}$$

  gilt.

  Eine Frage nach der Vertauschbarkeit von Limiten. Wir wählen $M_1 := [-1,1]$ mit der euklidischen Metrik. $M_2 := [-1,1]$ mit der euklidischen Metrik, und $M := I\!R$ auch mit der euklidischen Metrik (ist vollständig).

- Die Existenz der inneren Limiten ist sichtlich gegeben, wobei bei $h \to 0$ man die Regel von De L'Hospital anwendet, was auf das Differenzieren nach x hinausläuft.

- Wir wollen die Gleichmäßigkeit des GW bei Übergang von $a \to 0$ für alle $h \in M_1$ zeigen und beachten die Abschätzung

  $$|\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|$$

  als Konsequenz des MWS d DR. Dann ist

  $$\left|\frac{\arctan a(x+h)-\arctan ax}{h} - 0\right| \leq \frac{|ah|}{|h|} \leq |a|.$$

  Somit kann bei vorgegebenem $\epsilon > 0$ als $\delta := \epsilon$ gewählt werden, und dann ist für alle $h \in M_1$ gleichmäßig

  $$\left|\frac{\arctan a(x+h)-\arctan ax}{h} - \lim_{a\to 0}\frac{\arctan a(x+h)-\arctan ax}{h}\right| < \epsilon,$$

  sobald $|a| < \delta$ ist.

2.4 Vertauschung von Integration und Grenzwert von Funktionen (Seite 59 unterer Kasten)

2.4.1 Aufgabe

Man berechne

$$I := \lim_{a\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+a\sin^2(x)}.$$

2.4.2 Lösung

Es ist hier recht schwierig, auf direktem Weg den Wert $I = 1$ zu erhalten. Könnte man Integration und GW vertauschen, so ergäbe sich in einfacher Weise

$$\int_0^1 \lim_{a\to 0} \frac{dx}{1+a\sin^2(x)} = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Um Satz 1 ins Spiel bringen zu können, beachten wir, daß der Integrand für jedes a mit $|a| \leq \frac{1}{2}$ Riemannintegrierbar ist. Wir wählen eine Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n$ des Intervalls $[0,1]$ mit nach Null strebender Feinheit, sowie eine Belegungsfolge $\mathcal{B}_n$, sodaß, dies alles berücksichtigend, eine auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times I\!N$ definierte Funktion

$$F(a,n) := R(1/(1+ax^2), \mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_n)$$

gebildet werden kann, wobei "R" für die entsprechende Riemannsumme steht, und wegen der R-Integrierbarkeit von $\frac{1}{1+a\sin^2(x)}$ für alle $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ist

$$\lim_{n\to\infty} F(a,n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+a\sin^2(x)}.$$

Damit wird die Nähe zu Satz 1 erkennbarer, nämlich

$$\lim_{a\to 0}\lim_{n\to\infty} F(a,n) = \lim_{n\to\infty}\lim_{a\to 0} F(a,n)?$$

Wir gehen jetzt ähnlich wie in Abschnitt 2.2 vor:

- Es sei $M_1 := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ versehen mit der euklidischen Metrik. Weiters sei $M_2 := I\!N \cup \{\infty\}$ genau wie in 2.2.2 mit der Metrik wie dort, nämlich $d_2(m,n) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ falls $m, n \in I\!N$ und $d_2(m,\infty) = d_2(\infty, m) = \frac{1}{m}$ falls $m \in I\!N$. Weiters sei $M := I\!R$ mit der euklidischen Metrik, und wir vermerken, daß M vollständig ist.

- Die inneren Grenzwerte sind

  $$\lim_{a\to 0} F(a,n) = R(1, \mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_n)$$

  und

  $$\lim_{n\to\infty} F(a,n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+a\sin^2(x)},$$

  und, wie schon bemerkt wurde, existieren somit.

- Wir wollen zeigen, daß der zweite der beiden GW (im vorigen Punkt) gleichmäßig bezüglich $a \in M_1$ ist. Dazu benützen wir die leicht einzusehende Abschätzung (bitte sich die R-Summen explizit anzuschreiben):

  $$\begin{aligned} |F(a,n) - F(0,n)| &\leq \left|R(1/(1+a\sin^2(x)), \mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_n) - R(1, \mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_n)\right| \\ &\leq R(1, \mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_n) \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{1+a\sin^2(x)} - 1\right| \leq 2|a|, \end{aligned}$$

  aus der die gleichmäßige Konvergenz für alle $a \in M_1$ unmittelbar ablesbar ist.

(Auch der obere Kasten auf Seite 59 kann mit einem ähnlichen Beispiel belegt werden, z.B. $\lim_{m\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\frac{1}{2m^2}\sin^2(x)}$. Bitte entsprechende Details selbst zu überlegen.)

2.5 Vertauschung von uneigentlicher Riemannintegration und Grenzwert von Funktionen

2.5.1 Aufgabe

Man zeige

$$\lim_{x\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y^2} = \int_0^\infty \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y^2}.$$

(Sobald man das weiß, ergibt sich $\frac{\pi}{2}$ als Resultat).

2.5.2 Lösung

Um den Satz anwenden zu können, gehen wir ähnlich wie bisher vor:

- Wir definieren eine Funktion in 2 Variablen: $f(x,R) := \int_0^R \frac{e^{xy}dy}{1+y^2}$ und metrische Räume $M_1 := [0,1]$ (auch jedes Intervall der Form $[0,\epsilon]$ mit positivem ϵ hätte es getan) mit d_1 der euklidischen Metrik, sowie $M_2 := [0,\infty]$ mit einer Metrik, die den Punkt ∞ mitberücksichtigt: $d_2(R,R') := |\frac{R}{1+R} - \frac{R'}{1+R'}|$, falls beide, $R, R' \in I\!R^+ \cup \{0\}$ liegen, bzw $|\frac{R}{1+R} - 1|$, falls R im Endlichen liegt und $R' = \infty$ ist. Symmetrie beachtend läßt sich diese Definition zu einer Metrik d_2 auf $[0,\infty]$ ergänzen. Schließlich wird in $M := I\!R^1$ die euklidische Metrik verwendet, und wir vermerken die Vollständigkeit des Bildbereiches von f (d.i. von $I\!R^1$).

- Nun soll der Satz angewendet werden und wir betrachten die "inneren" Limiten.

  Auf der linken Seite wird die Rolle von y durch R übernommen. Es existiert offenkundig $\lim_{R\to\infty} f(x,R)$, was auf die Untersuchung der Konvergenz von $\int_0^\infty \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y^2}$ für beliebiges $x \in [0,1]$ hinausläuft.

  Auf der rechten Seite der GW-Formel im Satz ist der innere Limes

  $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

  Somit hat man 1. überprüft.

- Um vollen Erfolg zu garantieren, genügt es nachzuweisen, daß

  $$\lim_{R\to\infty} F(x,R)$$

  gleichmäßig für alle $x \in [0,1]$ konvergiert.

Dann müßte zu jedem positiven ϵ ein δ existieren, derart, daß für alle $x \in [0,1]$ der Ausdruck

$$d_1\left(\int_0^\infty \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y^2}, \int_0^R \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y^2}\right) = \cdots = \left|\int_R^\infty \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y^2}\right|$$

kleiner als ϵ wird, sobald $\frac{1}{1+R} = d_2(R,\infty) < \delta$ ist. Man erkennt unschwer, wie das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale (nämlich $\frac{e^{-xy}}{1+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2}$) zur Bejahung dieser Frage führt.

2.6 Partielle Ableitung unter das uneigentliche Integral ziehen

2.6.1 Aufgabe 108*

Man zeige, daß für alle positiven a die Ableitung von

$$F(a) := \int_0^\infty f(x,a)\,dx$$

mit $f(x,a) := \frac{\ln(1+a^2x^2)}{3+x^2}$ durch Differenzieren unter dem Integralzeichen gewonnen werden kann, m.a.W., daß

$$F'(a) = \int_0^\infty f_a(x,a)\,dx$$

gilt.

2.6.2 Lösung

Die Nähe zu Satz 1 wird erkennbarer wenn man sich auf die DN der partiellen Ableitung besinnt:

$$f_a(x,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,a+h) - f(x,a)}{h},$$

sodaß sich die Frage nach Gleichheit von

$$\lim_{h\to 0}\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{f(x,a+h) - f(x,a)}{h}\,dx = \lim_{R\to\infty}\lim_{h\to 0} \int_0^R \frac{f(x,a+h) - f(x,a)}{h}\,dx$$

stellt.

Um den Satz anwenden zu können, bedarf es folgender Schritte:

- Wahl von (M_1, d_1) als $([-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}], |\cdot|)$ (euklidische Metrik).
- Wahl von $M_2 := [0,\infty]$ mit der Metrik wie in 2.5.2. Nun wünscht man sich die glm. Konv. von z.B. $\lim_{h\to 0}\int_0^R \frac{f(x,a+h)-f(x,a)}{h}\,dx$ bezüglich $R \in M_2$.

Dieser innere GW ergibt sich durch Vertauschen von Limes und Integral (das ist auch eine Anwendung von Satz 1, vgl. 2.4) zu

$$\int_0^R f_a(x,a)\,dx,$$

sodaß es genügt, die bezüglich $R \in M_2$ glm. Konv. von

$$\int_0^R \frac{f(x,a+h) - f(x,a) - hf_a(x,a)}{h} dx \to 0$$

bei $h \to 0$ zu zeigen. Taylorentwicklung um die Stelle $a_0 = a$ (d.i. für ein in einer Umgebung von a zwei mal stetig differenzierbares g gibt es ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$g(a+h) - g(a) - g'(a)h = \frac{1}{2} g''(a+\theta h)h^2 \quad)$$

zeigt die Existenz einer (nicht notwendig in der Variablen x stetigen) Funktion $\theta(x)$ mit Werten in $(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{f(x,a+h) - f(x,a) - hf_a(x,a)}{h} &= \frac{1}{2} f_{aa}(x, a+\theta(x)h)h \\ &= \frac{x^2(1-2(a+\theta(x)h)x^2}{(1+(a+\theta(x)h)^2x^2)^2(3+x^2)} h. \end{aligned}$$

Der letztere Ausdruck erlaubt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} f_{aa}(x, a+\theta(x)h)h \right| &= |h| \left| \frac{x^2(1-2(a+\theta(x)h)x^2}{(1+(a+\theta(x)h)^2x^2)^2(3+x^2)} \right| \\ &\leq \frac{x^2(1+2(a+\frac{a}{2})x^2)\,dx}{(1+(a-\frac{a}{2})^2x^2)^2(3+x^2)}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$C := \int_0^\infty \frac{x^2(1+2(a+\frac{a}{2})x^2)\,dx}{(1+(a-\frac{a}{2})^2x^2)^2(3+x^2)},$$

(das Integral konvergiert, wie man sich bitte selbst überlege), so wird man zur Abschätzung,

$$\left| \int_0^R \frac{f(x,a+h) - f(x,a) - hf_a(x,a)}{h} dx \right| \leq C|h|$$

für alle $h \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ geführt, woraus die entsprechende gleichmäßige Konvergenz abgelesen werden kann.

A Anhang

A.1 Satz von der majorisierten Konvergenz (Maßtheorie)

Der Satz lautet

Satz 2 *Es sei $\{f_n\}$ eine Folge reellwertiger Funktionen, jede fast überall auf einer Lebesguemessbaren Menge X definiert. Weiters gebe es eine L-messbare Funktion g, die $|f_n(x)| \leq g(x)$ fast überall auf X erfüllt und $\int_X g(x)\,dx < \infty$ erfüllt. Dann folgt aus $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für fast alle $x \in X$, daß $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx$ existiert und gleich ist mit $\int_X f(x)\,dx$.*

Eine entsprechende Formulierung für "kontinuierliche" Limiten gibt es auch:

Satz 3 *Es sei (M, d) ein metrischer Raum, (X, Ω, μ) ein vollständiger Maßraum und $f : M \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit*

- *Alle Funktionen $x \mapsto f(m, x)$ sind meßbar.*
- *Für alle $x \in X$ gilt $\lim_{m\to m_0} f(m, x) = f(m_0, x)$. (man kann das abschwächen, indem man eine Nullmenge aus X entfernt, bzw., wenn M abzählbar ist, für jedes $f(m, \cdot)$ eine Nullmenge in X entfernt – man bekommt die obige Version auf diese Weise.)*
- *Es gibt eine absolutintegrierbare, meßbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$|f(m, x)| \leq |g(x)|.$$

Unter diesen Prämissen gilt

$$\lim_{m\to m_0} \int_X f(m, x)\,d\mu(x) = \int_X \lim_{m\to m_0} f(m, x)\,d\mu(x).$$

A.2 Anwendungen

Im weiteren soll noch verwendet werden, daß jedes (uneigentliche) Bereichsintegral im Sinne der ANA3-Vorlesung ein Lebesgueintegral ist, und der Integrand in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.

A.2.1 Nochmals 2.4.

Hier ging es darum $\lim_{a\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+a\sin^2(x)}$ zu bestimmen. Wir wollen Satz 3 verwenden:

- Es sei $M := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und d die euklidische Metrik.
- Jede der Funktionen $x \to \frac{1}{1+a\sin^2(x)}$ ist absolut integrierbar, sobald $a \in M$ liegt.
- Als Funktion g definieren wir $g(x) := \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ (evidente Abschätzung für alle Integranden!).

- Nun sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt und man darf deshalb die Limiten vertauschen.

Wenn man jetzt zu 2.4.2 blickt, erkennt man eine beträchtliche Vereinfachtung: natürlich, Satz 3 ist viel stärker auf Integration zugeschnitten – vergleichbar Seite 59 im Skriptum.

Der Nachweis für $\lim_{a\to 0}\int_0^1 x^a dx = \int_0^1 \lim_{a\to 0}(x^a)\ dx = \cdots = 0$ kann mittels Seite 59 nicht erbracht werden, wohl aber in der gleichen Weise wie eben mittels Satz 3.

A.2.2 Nochmals 2.5.

Hier ging es um Vertauschen von

$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^\infty \frac{e^{-xy}dy}{1+y^2} = \int_0^\infty \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-xy}}{1+y^2}\right) dy.$$

Zunächst interpretiert man die Integrale als uneigentliche R-Bereichsintegrale, und demgemäß, weil die Integranden als Funktionen von y stetig und somit meßbar sind, als L-Integrale. Nun bemüht man sich, Satz 3 ins Spiel zu bringen:

- $M := [0,1]$ mit der euklidischen Metrik. (Natürlich, M könnte jedes endliche Teilintervall von $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sein, welches 0 enthält.)
- Die entsprechende Meßbarkeit und L^1-angehörigkeit (d.i. Absolutintegrierbarkeit) wurde schon erwähnt und ist erkennbar.
- Als Majorante findet man $g(y) := \frac{1}{1+y^2}$.

Nach diesen Andeutungen, die der interessierte Leser etwas genauer ausführe, findet man die Vertauschbarkeit. Im vorliegenden Beispiel funktioniert natürlich auch die glm. Konvergenz, wie 2.5 gezeigt hat.

A.2.3 Nochmals 2.6.

Hier ging es bei positivem a (nach Rekursnahme auf die Grenzwertdefinition der Ableitung) um das Vertauschen

$$\lim_{h\to 0}\int_0^\infty \frac{f(x,a+h)-f(x,a)}{h}\,dx = \int_0^\infty \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x,a+h)-f(x,a)}{h}\right) dx,$$

wobei $f(x,a) := \frac{\ln(1+a^2x^2)}{3+x^2}$ ist. Um Satz 3 anwenden zu können, kann wie folgt vorgegangen werden:

- Es sei $M := [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ und d die euklidische Metrik.
- es sei $F(h,x) := \frac{1}{h}(f(x,a+h) - f(x,a)) = \frac{1}{3+x^2}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+(a+h)^2x^2}{1+a^2x^2}\right)$ für $h \neq 0$ und $F(0,x) := f_a(x,a) = \frac{2ax^2}{(3+x^2)(1+a^2x^2)}$.

- Die Rolle von f im Satz werde von F gespielt. Die Meßbarkeit von $x \mapsto F(h,x)$ für alle $h \in M$ ergibt sich aus der Stetigkeit (bezüglich x).

- Nun begibt man sich auf die Suche nach dem g. Der MWS der DR liefert ein $\theta = \theta(x)$ mit

$$\begin{aligned}
|\ln(1+(a+h)^2x^2) - \ln(1+a^2x^2)| &\leq |h| \sup \left| \frac{2(a+\theta h)x^2}{1+(a+\theta h)^2x^2} \right| \\
&\leq |h| \frac{2(a+\frac{a}{2})x^2}{1+(a-\frac{a}{2})^2x^2} \\
&\leq \frac{12}{a}.
\end{aligned}$$

  (man könnte es "besser" machen – nicht nötig, wie wir gleich sehen werden.) Nun setzen wir $g(x) := \frac{12}{a(3+x^2)}$. Dann ist g eine Schranke für alle $x \mapsto F(h,x)$ mit $h \in M$, auch für $h = 0$, wie man unmittelbar nachvollzieht. Verbleibt, die Meßbarkeit von g (als stetiger Funktion) und ihre Absolutintegrierbarkeit anzumerken. Somit ergibt Anwendung von Satz 3 die Vertauschbarkeit der Limiten.

Satz 3 reduziert somit den Aufwand an Abschätzungsarbeit erheblich!