

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

z.z.: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| < \varepsilon.$$

" $\Rightarrow$ " Angenommen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert

Dann konvergiert per Definition die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nach Satz 4.24 ist (S_n) somit eine Cauchy-Folge.

Also existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq N$ gilt:

$$|S_n - S_m| < \varepsilon. \text{ Für } n > m \text{ ist } |S_n - S_m| = \sum_{j=m+1}^n a_j.$$

Somit gilt $\left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq N$.

" $\Leftarrow$ " Angenommen zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_n - s_m| < \varepsilon. \text{ Für } n > m \text{ ist } |s_n - s_m| = \sum_{j=m+1}^n a_j$$

$$\text{Somit gilt } \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| < \varepsilon \text{ für alle } n > m \geq N.$$

" $\Leftarrow$ " Abgekommen zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| < \varepsilon. \text{ Da } \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| = |s_n - s_m|, \text{ ist } (s_n) \text{ eine Cauchy-Folge}$$

Nach Satz 4.25 konvergiert jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, also konvergiert (s_n)

Somit konvergiert per Definition $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ □

$$n > m \quad s_n - s_m$$

$$n = m$$

$$n < m \quad |s_n - s_m| = |s_m - s_n|$$

A2. $d \in \mathbb{N}$ $d > 1$

a) z.z. $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1, \dots, d-1\}$

$$\exists s \in [0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k d^{-k} = s$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (d-1) d^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d-1}{d^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^n} = 1 \end{aligned}$$

$$a_n \geq 0 \wedge d > 1 \Rightarrow a_n d^{-n} \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} \in [0,1]$$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n d^{-n} \geq 0 \Rightarrow \sum a_n d^{-n}$ aufwachsen
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} \in [0,1]$ beschränkt

4.15 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n}$ konvergiert

$$\Rightarrow \exists s \in [0,1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} = s$$

$$\lambda \in [0,1], \mu \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, \mu = 1 \Rightarrow \lambda + \mu = 1$$

$$a_n + a$$

Angenommen:

$$a_n + a \geq$$

$$\Rightarrow a_n +$$

b) z.z. $\forall x \in [0,1] \quad \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \{0, \dots, d-1\}$

$$\text{so dass} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} = x$$

Konstruktion:

$$a_1 = \lfloor d x \rfloor$$

$$a_2 = \lfloor d x_1 \rfloor$$

$$a_3 = \lfloor d x_2 \rfloor$$

$$\dots a_n = \lfloor d x_{n-1} \rfloor$$

$$x_1 = d x - a_1$$

$$x_2 = d x_1 - a_2$$

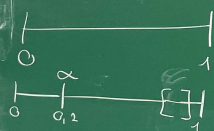
$$x_3 = d x_2 - a_3$$

$$x_n = d x_{n-1} - a_n$$

$$x = 0.1234 \quad d = 10$$

$$a_1 = \lfloor 1.234 \rfloor = 1 \quad x_1 = 0.234$$

$$= 1$$



$$[0,1] \quad x = \sum_{k=1}^n a_k d^{-k} + x_n d^{-n}$$

$$x_n \in [0,1) \quad d^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k d^{-k} = x$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} = x \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n)$$

$$X = \sum_{k=1}^n a_k d^{-k} + X_n d^{-n}$$

$$X_n \in [0,1] \quad d^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k d^{-k} = X$$

c) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n d^{-n} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n \\ \vee \begin{cases} a_n = b_n & n < N \\ a_n = b_n + 1 & n = N \\ a_n = 0 \wedge b_n = d-1 & n > N \end{cases} \end{array} \right)$

Fall 1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n$
 $\Rightarrow \forall n \quad a_n d^{-n} = b_n d^{-n}$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n d^{-n}$

Fall 2. $\exists n \in \mathbb{N} \quad a_n \neq b_n$
 Sei $N := \min \{ n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n \}$
 $\Rightarrow \forall n < N, a_n = b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} = \sum_{n=1}^N a_n d^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n d^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^N b_n d^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n d^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n d^{-n}$$

$$\wedge d > 1 \Rightarrow a_n d^{-n} \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} \geq 0$$

Intervallschachtelungsprinzip

$a_n d^{-n} \in [0,1]$
 $a_n d^{-n} \geq 0 \Rightarrow \sum a_n d^{-n}$ aufwachsend
 $a_n d^{-n} \in [0,1]$ beschränkt
 $a_n d^{-n}$ konvergiert
 $s \in [0,1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k d^{-k} = s$
 $A \in [0,1], B \in [0,1]$
 $\Rightarrow A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k d^{-k} = 0 \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k d^{-k} = 0$
 $\Rightarrow A = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot d^{-k} = 0 \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} (d-1) d^{-k} = 1$

Seien $A := \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} d^{-k}$
 $B := \sum_{k=1}^{\infty} b_{N+k} d^{-k}$
 $\Rightarrow 0 \leq A \leq \sum_{k=1}^{\infty} (d-1) d^{-k} = 1$
 $0 \leq B \leq \sum_{k=1}^{\infty} (d-1) d^{-k} = 1$
 $a_N + A = b_N + B \wedge a_N \neq b_N$
 Angenommen: $a_N - b_N > 1 (\Rightarrow a_N - b_N \geq 2)$
 $a_N + A \geq b_N + 2 > b_N + 1 \geq b_N + B$
 $\Rightarrow a_N + A > b_N + B \quad \text{falsch}$
 $\Rightarrow a_N = b_N + 1$
 $\Rightarrow a_N + A = b_N + 1 + A = b_N + B \Rightarrow B = 1 + A$