



Abg. + Bes $\Leftrightarrow$ Kompakt

Satz 13.40 (Heine-Borel)

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow K$ abg. + bes.



$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$



$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^4 K_n$$

$$\textcircled{a) } \mathcal{T} = \{ U \subseteq M_1 \times M_2 \mid \text{wenn } \exists U_i \in \mathcal{T}_i, \text{ d.h. } x \in U_1 \times U_2 \subseteq U \}$$

Jede Aussage über $x \in \phi$ wahr, insb. $\uparrow$, also $\phi \in \mathcal{T}$

$U = M_1 \times M_2$ Für alle $x \in U$ ist $M_1 \in \mathcal{T}_1, M_2 \in \mathcal{T}_2, x \in M_1 \times M_2 \subseteq U$
 $\Rightarrow M_1 \times M_2 \in \mathcal{T}$

I beliebige Indexmenge, $U_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq M_1 \times M_2$.

Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ beliebig, fest $\Rightarrow x \in U_j$ für ein $j \in I$. Also existieren $V_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2$

$$x \in U_1 \times U_2 \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

$$\textcircled{b) } X \text{ Hausdorff} \Leftrightarrow \{x, y \in X\} \subset X \times X \text{ abg. in } X \times X$$

Ist $(y, z) \in \bigcap_{i=1}^n (U_{1i} \times U_{2i})$, so ist $(y, z) \in U_{1i} \times U_{2i} \forall i=1, \dots, n$, also $y \in U_{1i}$ und

$z \in U_{2i} \forall i=1, \dots, n \Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^n U_{1i}$ und $z \in \bigcap_{i=1}^n U_{2i}$

$$\Rightarrow (y, z) \in \left(\bigcap_{i=1}^n U_{1i} \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n U_{2i} \right) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n (U_{1i} \times U_{2i}) \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^n U_{1i} \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n U_{2i} \right),$$

$$\text{also } \bigcap_{i=1}^n (U_{1i} \times U_{2i}) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_{1i} \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n U_{2i} \right)$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n (U_{1i} \times U_{2i}) = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^n U_{1i} \right)}_{\in \mathcal{T}_1} \times \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^n U_{2i} \right)}_{\in \mathcal{T}_2} \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U_i \in \mathcal{T}$ für $i=1, \dots, n$. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n U_i \in M_1 \times M_2$.
 $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ beliebig fest. Für alle $i=1, \dots, n$ existieren $V_{1i} \in \mathcal{T}_1, V_{2i} \in \mathcal{T}_2$ mit $x \in V_{1i} \times V_{2i} \in U_i$.
 $\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n (V_{1i} \times V_{2i}) = \left(\bigcap_{i=1}^n V_{1i} \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_{2i} \right)$

Ist $y \in \bigcap_{i=1}^n (V_{1i} \times V_{2i})$, so ist $y \in V_{1i} \times V_{2i} \forall i=1, \dots, n$, also $y \in V_i \forall i=1, \dots, n$, d.h.
 $y \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n (V_{1i} \times V_{2i}) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$

Ist $(y, z) \in \left(\bigcap_{i=1}^n V_{1i} \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_{2i} \right)$, so ist $y \in V_{1i} \forall i=1, \dots, n$ und $z \in V_{2i} \forall i=1, \dots, n$. Also ist
 $(y, z) \in V_{1i} \times V_{2i} \forall i=1, \dots, n$, d.h. $(y, z) \in \bigcap_{i=1}^n (V_{1i} \times V_{2i}) \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^n V_{1i} \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_{2i} \right) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (V_{1i} \times V_{2i})$

② X normierter Raum, $T: X \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige

T beschränkt $\Leftrightarrow T$ ist stetig

