

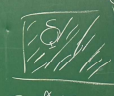
$$①) \quad x_n = \begin{pmatrix} n \sin(\frac{1}{n}) \\ \cos(\frac{1}{n}) \end{pmatrix}$$

$$n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin(t)}{t} = \cos(t) = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$$

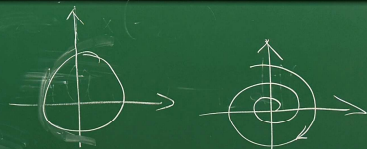
$$x_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{n-1} \quad x_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nb \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n \Rightarrow b=0$$

$$B = \{ \|b-a\| < \frac{\varepsilon_0}{3} \} \quad |a_n - a_m| > \frac{\varepsilon_0}{3} \quad |b_j - 0| < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

$\ell^\infty \setminus C$ offen?
 C abg in ℓ^∞
 $C \subset \ell^\infty$, 
 $b_n \in \ell^\infty, a_n \in \ell^\infty \setminus C$
 $|b_n - b_k| > |a_n - a_k| = \frac{\varepsilon_0}{3}$
 $|a_n - b_n| = \frac{\varepsilon_0}{3}$
 $|a_k - b_k| > \frac{\varepsilon_0}{3}$
 $\Rightarrow b_n \notin B \Rightarrow B \subset \ell^\infty \setminus C$

$$ii) \quad x_n = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}^n x_0$$



$$① |r| < 1: |r|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$② |r| = 1: x_n = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^n x_0 \Rightarrow \text{konv.}$$

$$③ |r| > 1: |r|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \text{konv. nicht}$$



② $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ wohldefiniert. Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ eine Folge a_n beschränkt aber es gilt $\sup \{|a_n|\} < \infty$.

$$\bullet \|a_n\| \geq 0 \Rightarrow \|a_n\|_{\ell^\infty} \geq 0, \quad a_n = 0 \Rightarrow \|a_n\|_{\ell^\infty} = 0$$

• Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\|\lambda a_n\|_{\ell^\infty} = \sup \{|\lambda a_n|\} = |\lambda| \sup \{|a_n|\} = |\lambda| \cdot \|a_n\|_{\ell^\infty}$$

$$\bullet \|a_n + b_n\|_{\ell^\infty} = \sup \{|a_n + b_n|\} \leq \|a_n\|_{\ell^\infty} + \|b_n\|_{\ell^\infty}$$

$$\text{weil } |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq \|a_n\|_{\ell^\infty} + \|b_n\|_{\ell^\infty}$$

Sei $(a_n^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ^{in ℓ^∞} . Dann ist: $\|a_n^{(l)} - a_n^{(m)}\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$

$$\Rightarrow |a_n^{(l)} - a_n^{(m)}| < \varepsilon \Rightarrow (a_n^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \text{ eine Cauchy-Folge in } \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow \exists a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n^{(m)} \rightarrow a_n$ (da $\mathbb{C}$ vollständig). Dann gibt es ein $m_1 \in \mathbb{N}$

$$\text{so dass } \|a_n^{(m)} - a_n^{(m_1)}\| < 1 \Rightarrow |a_n^{(m)} - a_n^{(m_1)}| < 1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |a_n - a_n^{(m_1)}| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq |a_n^{(m_1)}| + 1 \leq \|a_n^{(m_1)}\|_{\ell^\infty} + 1 < M \Rightarrow a_n \text{ beschränkt}$$

z.z. $a_n^{(m)} \rightarrow a_n$. Weil $\|a_n^{(m)} - a_n^{(l)}\|_{\ell^\infty} < \varepsilon \Rightarrow |a_n^{(m)} - a_n^{(l)}| < \varepsilon$. Ab dann

fixiere $m \geq m_0$ und $l \rightarrow \infty$, dann erhalten wir $|a_n^{(m)} - a_n| < \varepsilon \Rightarrow \|a_n^{(m)} - a_n\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$.