

Analysis II

Ausarbeitung zu den Votieraufgaben

Übungsblatt 2 und Übungsblatt 3

Diese Ausarbeitung fasst die Aufgabenstellungen und die an der Tafel präsentierten Lösungswege sauber zusammen. Die Rechnungen wurden ausführlicher ausgeschrieben und an einigen Stellen durch zusätzliche Erklärungen, Hinweise und Begründungen ergänzt.

Sommersemester 2026

Mirkan Deniz Günkaya

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	2
1 Übungsblatt 2	3
1.1 Aufgabe 1: Unter- und Obersummen für $f(x) = x^2$	3
1.2 Aufgabe 2: Additivität und Linearität des Riemann-Integrals	7
2 Übungsblatt 3	9
2.1 Aufgabe 1: Berechnung elementarer Integrale	9
2.2 Aufgabe 2: Grenzwerte als Riemann-Summen	11
2.3 Aufgabe 3: Wallissches Produkt	14
3 Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse	18

Vorbemerkung

Die folgenden Lösungen orientieren sich an den Tafelrechnungen. Dabei werden die einzelnen Schritte ausführlicher dargestellt, damit die Argumentation auch im Selbststudium nachvollziehbar ist.

Wichtiger Hinweis zu Übungsblatt 2, Aufgabe 1

In der Tafelrechnung zu Übungsblatt 2, Aufgabe 1 wird der Fall

$$0 < a < b$$

verwendet. Genau in diesem Fall ist die Funktion $f(x) = x^2$ auf $[a, b]$ streng monoton wachsend. Deshalb liegen die Minima auf den Teilintervallen jeweils am linken Rand und die Maxima jeweils am rechten Rand.

Falls im Aufgabenblatt keine Positivitätsannahme steht, müsste man die Fälle $b \leq 0$, $0 < a < b$ und $a < 0 < b$ getrennt betrachten, da x^2 auf $(-\infty, 0]$ monoton fallend und auf $[0, \infty)$ monoton wachsend ist.

1 Übungsblatt 2

1.1 Aufgabe 1: Unter- und Obersummen für $f(x) = x^2$

Aufgabe 1

Sei

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Betrachten Sie eine äquidistante Partition P_n durch $n + 1$ Punkte von $[a, b]$.

(i) Berechnen Sie die Untersumme $s(P_n, f)$ sowie die Obersumme $S(P_n, f)$.

(ii) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(P_n, f) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n, f).$$

(iii) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_a^b x^2 \, dx.$$

Lösung zu Aufgabe 1

Wir betrachten wie in der Tafelrechnung den Fall

$$0 < a < b.$$

Dann ist $f(x) = x^2$ auf $[a, b]$ streng monoton wachsend, denn

$$f'(x) = 2x > 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Die äquidistante Zerlegung P_n besitzt die Punkte

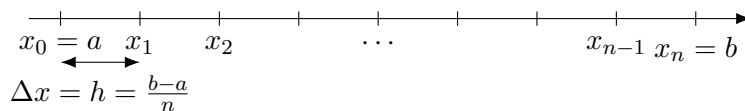
$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$h := \frac{b-a}{n}.$$

Dann gilt

$$x_k = a + kh.$$



Da f monoton wachsend ist, gilt auf jedem Teilintervall

$$[x_{k-1}, x_k]$$

für das Minimum und Maximum:

$$\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}), \quad \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k).$$

Daher gilt für die Untersumme:

$$s(P_n, f) = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = h \sum_{k=1}^n x_{k-1}^2.$$

Da

$$x_{k-1} = a + (k-1)h,$$

erhalten wir

$$s(P_n, f) = h \sum_{k=1}^n (a + (k-1)h)^2.$$

Mit der Umbenennung $j = k - 1$ wird daraus

$$s(P_n, f) = h \sum_{j=0}^{n-1} (a + jh)^2.$$

Nun wird die Klammer ausmultipliziert:

$$(a + jh)^2 = a^2 + 2ajh + j^2h^2.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} s(P_n, f) &= h \sum_{j=0}^{n-1} (a^2 + 2ajh + j^2h^2) \\ &= h \left(\sum_{j=0}^{n-1} a^2 + 2ah \sum_{j=0}^{n-1} j + h^2 \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \right). \end{aligned}$$

Wir verwenden die bekannten Summenformeln

$$\sum_{j=0}^{n-1} 1 = n, \quad \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} s(P_n, f) &= h \left(na^2 + 2ah \frac{(n-1)n}{2} + h^2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) \\ &= hna^2 + ah^2(n-1)n + h^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $h = \frac{b-a}{n}$ ein, erhält man

$$s(P_n, f) = a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{n-1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Nun berechnen wir die Obersumme:

$$S(P_n, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = h \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Da

$$x_k = a + kh,$$

gilt

$$S(P_n, f) = h \sum_{k=1}^n (a + kh)^2.$$

Wieder wird ausmultipliziert:

$$(a + kh)^2 = a^2 + 2akh + k^2h^2.$$

Also

$$\begin{aligned} S(P_n, f) &= h \sum_{k=1}^n (a^2 + 2akh + k^2h^2) \\ &= h \left(na^2 + 2ah \sum_{k=1}^n k + h^2 \sum_{k=1}^n k^2 \right). \end{aligned}$$

Mit

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

folgt

$$\begin{aligned} S(P_n, f) &= h \left(na^2 + 2ah \frac{n(n+1)}{2} + h^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= hna^2 + ah^2n(n+1) + h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $h = \frac{b-a}{n}$ ergibt

$$S(P_n, f) = a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{n+1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Nun betrachten wir die Grenzwerte. Es gilt

$$\frac{n-1}{n} \rightarrow 1, \quad \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

und ebenso

$$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \quad \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s(P_n, f) &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n, f) &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3}. \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte stimmen überein. Wir vereinfachen nun:

$$a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n, f) = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Damit ist $f(x) = x^2$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Alternativ kann man dies direkt mit der Stammfunktion berechnen:

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Anmerkung

Ein schöner Kontrollschritt ist die Differenz von Ober- und Untersumme. Da f monoton wachsend ist, gilt

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = h \sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2).$$

Diese Summe teleskopiert:

$$\sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) = x_n^2 - x_0^2 = b^2 - a^2.$$

Also

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \frac{b-a}{n} (b^2 - a^2) \rightarrow 0.$$

Dies erklärt intuitiv, warum Ober- und Untersumme denselben Grenzwert besitzen.

1.2 Aufgabe 2: Additivität und Linearität des Riemann-Integrals

Aufgabe 2

- (i) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ beschränkt und $c \in [a, b]$. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkungen

$$f|_{[a,c]} \quad \text{und} \quad f|_{[c,b]}$$

Riemann-integrierbar sind. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

- (ii) Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ Riemann-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt: $\alpha f + \beta g$ ist Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

Lösung zu Aufgabe 2 Teil i: Additivität bezüglich des Intervalls

Die Aussage bedeutet anschaulich: Wenn man das Intervall $[a, b]$ an einer Stelle c in zwei Teilintervalle zerlegt,

$$[a, b] = [a, c] \cup [c, b],$$

dann zerfällt das Integral über das große Intervall in die Summe der Integrale über die beiden Teilintervalle:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Wir skizzieren den Beweis über Zerlegungen.

Seien P_1 eine Zerlegung von $[a, c]$ und P_2 eine Zerlegung von $[c, b]$. Dann kann man beide Zerlegungen zu einer Zerlegung P von $[a, b]$ zusammensetzen:

$$P = P_1 \cup P_2.$$

Für eine solche Zerlegung gilt unmittelbar:

$$s(P, f) = s(P_1, f|_{[a,c]}) + s(P_2, f|_{[c,b]}),$$

und ebenso

$$S(P, f) = S(P_1, f|_{[a,c]}) + S(P_2, f|_{[c,b]}).$$

Sind nun beide Einschränkungen Riemann-integrierbar, dann kann man P_1 und P_2 so fein wählen, dass die jeweiligen Differenzen aus Ober- und Untersumme beliebig klein werden. Dann wird auch

$$S(P, f) - s(P, f)$$

beliebig klein. Also ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Umgekehrt: Ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, dann wählt man eine Zerlegung P von $[a, b]$, die den Punkt c enthält. Falls eine Zerlegung c nicht enthält, kann man sie durch Hinzufügen von c verfeinern. Eine Verfeinerung verschlechtert die Differenz zwischen Ober- und Untersumme nicht.

Dann zerfällt P in eine Zerlegung von $[a, c]$ und eine Zerlegung von $[c, b]$. Daraus folgt, dass beide Einschränkungen Riemann-integrierbar sind.

Schließlich folgt aus der Zerlegung der Riemann-Summen:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{x_k \leq c} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{x_{k-1} \geq c} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Im Grenzübergang erhält man daher

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Lösung zu Aufgabe 2 Teil ii: Linearität des Integrals

Wir wollen zeigen:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Sei $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und seien $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ Zwischenpunkte. Die Riemann-Summe von $\alpha f + \beta g$ lautet:

$$\sum_{k=1}^n (\alpha f + \beta g)(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Da

$$(\alpha f + \beta g)(\xi_k) = \alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k),$$

folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\alpha f + \beta g)(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Geht nun die Feinheit der Zerlegung gegen 0, so konvergieren die Riemann-Summen von f und g , weil f und g Riemann-integrierbar sind. Daher konvergiert auch die Riemann-Summe von $\alpha f + \beta g$. Somit ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Merke

Die beiden wichtigsten Strukturregeln des Riemann-Integrals sind:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{und} \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Die erste Regel beschreibt die Additivität bezüglich des Integrationsintervalls, die zweite Regel beschreibt die Linearität bezüglich des Integranden.

2 Übungsblatt 3

2.1 Aufgabe 1: Berechnung elementarer Integrale

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_1^e \frac{\ln(x)^3}{x} dx, \quad (ii) \int_5^6 \frac{2}{x^2 - 3x - 4} dx.$$

Lösung zu Aufgabe 1 Teil i

Wir berechnen

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^3}{x} dx.$$

Hier bietet sich die Substitution

$$t = \ln(x)$$

an. Dann gilt

$$dt = \frac{1}{x} dx.$$

Außerdem verändern sich die Grenzen:

$$x = 1 \implies t = \ln(1) = 0, \quad x = e \implies t = \ln(e) = 1.$$

Somit wird das Integral zu

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^3}{x} dx = \int_0^1 t^3 dt.$$

Dieses Integral ist elementar:

$$\int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Damit gilt

$$\boxed{\int_1^e \frac{\ln(x)^3}{x} dx = \frac{1}{4}.$$

Lösung zu Aufgabe 1 Teil ii

Wir berechnen

$$\int_5^6 \frac{2}{x^2 - 3x - 4} dx.$$

Zuerst faktorisieren wir den Nenner:

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4).$$

Also

$$\frac{2}{x^2 - 3x - 4} = \frac{2}{(x + 1)(x - 4)}.$$

Wir verwenden Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2}{(x + 1)(x - 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 4}.$$

Multiplikation mit $(x+1)(x-4)$ ergibt

$$2 = A(x-4) + B(x+1).$$

Setzen wir $x = -1$, erhalten wir

$$2 = -5A, \quad \text{also} \quad A = -\frac{2}{5}.$$

Setzen wir $x = 4$, erhalten wir

$$2 = 5B, \quad \text{also} \quad B = \frac{2}{5}.$$

Damit gilt

$$\frac{2}{(x+1)(x-4)} = -\frac{2}{5} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{5} \frac{1}{x-4}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \int_5^6 \frac{2}{x^2 - 3x - 4} dx &= -\frac{2}{5} \int_5^6 \frac{1}{x+1} dx + \frac{2}{5} \int_5^6 \frac{1}{x-4} dx \\ &= -\frac{2}{5} [\ln(x+1)]_5^6 + \frac{2}{5} [\ln(x-4)]_5^6. \end{aligned}$$

Da auf $[5, 6]$ sowohl $x+1 > 0$ als auch $x-4 > 0$ gilt, brauchen wir hier keine Betragszeichen auszuwerten.

Nun setzen wir die Grenzen ein:

$$\begin{aligned} \int_5^6 \frac{2}{x^2 - 3x - 4} dx &= -\frac{2}{5} (\ln(7) - \ln(6)) + \frac{2}{5} (\ln(2) - \ln(1)) \\ &= -\frac{2}{5} \ln\left(\frac{7}{6}\right) + \frac{2}{5} \ln(2) \\ &= \frac{2}{5} \ln\left(\frac{12}{7}\right). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\boxed{\int_5^6 \frac{2}{x^2 - 3x - 4} dx = \frac{2}{5} \ln\left(\frac{12}{7}\right).}$$

2.2 Aufgabe 2: Grenzwerte als Riemann-Summen

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, indem Sie diese als Riemann-Summen auffassen:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2},$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}.$$

Prinzip der Riemann-Summe

Ist $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(x) \, dx.$$

Man muss also versuchen, eine gegebene Summe in die Form

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

zu bringen.

Lösung zu Aufgabe 2 Teil i

Wir betrachten

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}.$$

Der entscheidende Schritt besteht darin, n^2 im Nenner auszuklammern:

$$k^2 + n^2 = n^2 \left(\frac{k^2}{n^2} + 1 \right) = n^2 \left(\left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right).$$

Also gilt

$$\frac{n}{k^2 + n^2} = \frac{n}{n^2 \left(\left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1}.$$

Damit wird die Summe zu

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1}.$$

Dies ist eine Riemann-Summe zur Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$. Daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \, dx.$$

Nun gilt

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x).$$

Also

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Lösung zu Aufgabe 2 Teil ii

Wir betrachten

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}.$$

Die Summe läuft nicht von 1 bis n , sondern von $n + 1$ bis $2n$. Deshalb setzen wir

$$k = n + j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dann gilt

$$k^2 = (n + j)^2.$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n + j)^2}.$$

Nun klammern wir n^2 aus:

$$(n + j)^2 = n^2 \left(1 + \frac{j}{n}\right)^2.$$

Also

$$\frac{n}{(n + j)^2} = \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{j}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{j}{n}\right)^2}.$$

Damit wird die Summe zu

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{j}{n}\right)^2}.$$

Dies ist eine Riemann-Summe zur Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$. Daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x)^2} dx.$$

Wir berechnen das Integral:

$$\int \frac{1}{(1 + x)^2} dx = \int (1 + x)^{-2} dx = -\frac{1}{1 + x}.$$

Also

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}.$$

2.3 Aufgabe 3: Wallissches Produkt

Aufgabe 3

Wallissches Produkt.

(i) Leiten Sie eine Rekursionsformel her für die Integrale

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^m dx.$$

(ii) Zeigen Sie damit die Gleichheit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 3 Teil i: Rekursion für I_m

Wir definieren

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^m dx.$$

Wir wollen eine Rekursionsformel finden, die I_m mit I_{m-2} verbindet.

Für $m \geq 2$ schreiben wir

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{m-1} \sin(x) dx.$$

Nun verwenden wir partielle Integration mit

$$u = \sin(x)^{m-1}, \quad dv = \sin(x) dx.$$

Dann gilt

$$du = (m-1) \sin(x)^{m-2} \cos(x) dx, \quad v = -\cos(x).$$

Damit erhalten wir

$$I_m = \left[-\sin(x)^{m-1} \cos(x) \right]_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{m-2} \cos(x)^2 dx.$$

Der Randterm verschwindet. Denn für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\cos(x) = 0$, und für $x = 0$ ist $\sin(x) = 0$. Also

$$I_m = (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{m-2} \cos(x)^2 dx.$$

Nun verwenden wir

$$\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2.$$

Somit

$$\begin{aligned} I_m &= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{m-2} (1 - \sin(x)^2) dx \\ &= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{m-2} dx - (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^m dx \\ &= (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$I_m + (m-1)I_m = (m-1)I_{m-2}.$$

Also

$$mI_m = (m-1)I_{m-2}.$$

Damit erhalten wir die Rekursionsformel

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} \quad (m \geq 2).$$

Die Anfangswerte sind

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2},$$

und

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

Gerade und ungerade Indizes

Aus der Rekursionsformel

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

folgen getrennte Produktdarstellungen für gerade und ungerade Indizes.

Für gerade Indizes erhalten wir:

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}.$$

Wiederholtes Anwenden liefert

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0.$$

Da $I_0 = \frac{\pi}{2}$, gilt

$$I_{2n} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Für ungerade Indizes erhalten wir:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}.$$

Wiederholtes Anwenden liefert

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1.$$

Da $I_1 = 1$, gilt

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

Lösung zu Aufgabe 3 Teil ii: Herleitung des Wallischen Produkts

Wir betrachten den Quotienten

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}.$$

Mit den eben gefundenen Produktformeln gilt

$$\begin{aligned} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \frac{\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}}{\left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}\right) \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k}{2k-1} \\ &= \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}. \end{aligned}$$

Da

$$(2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$$

und

$$(2k)^2 = 4k^2,$$

folgt

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}.$$

Also

$$\prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \rightarrow 1.$$

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$$0 \leq \sin(x) \leq 1.$$

Bei Zahlen zwischen 0 und 1 wird die Potenz kleiner, wenn der Exponent größer wird. Deshalb gilt

$$\sin(x)^{2n+1} \leq \sin(x)^{2n} \leq \sin(x)^{2n-1}.$$

Durch Integration über $[0, \frac{\pi}{2}]$ folgt

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}.$$

Außerdem liefert die Rekursionsformel

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}.$$

Aus $I_{2n} \leq I_{2n-1}$ folgt

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2n}{2n+1} \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \geq \frac{2n}{2n+1}.$$

Andererseits folgt aus $I_{2n+1} \leq I_{2n}$, dass

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

Insgesamt erhalten wir also die Abschätzung

$$\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

Da

$$\frac{2n}{2n+1} \rightarrow 1,$$

folgt mit dem Sandwich-Lemma

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \rightarrow 1.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Also

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Anmerkung zum Wallis-Produkt

Das Wallissche Produkt ist besonders interessant, weil es die Zahl π durch ein unendliches Produkt rationaler Zahlen darstellt:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots$$

Der Zusammenhang entsteht hier über die Integrale

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^m dx.$$

Die geraden Exponenten enthalten wegen $I_0 = \frac{\pi}{2}$ den Faktor π , die ungeraden Exponenten wegen $I_1 = 1$ nicht. Der Quotient aus beiden Produktdarstellungen erzeugt dann genau das Wallissche Produkt.

3 Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

Ergebnisse auf einen Blick

Übungsblatt 2, Aufgabe 1:

Für $0 < a < b$, $f(x) = x^2$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, gilt

$$s(P_n, f) = a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{n-1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

$$S(P_n, f) = a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{n+1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Außerdem

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Übungsblatt 2, Aufgabe 2:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Übungsblatt 3, Aufgabe 1:

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^3}{x} dx = \frac{1}{4},$$

$$\int_5^6 \frac{2}{x^2 - 3x - 4} dx = \frac{2}{5} \ln\left(\frac{12}{7}\right).$$

Übungsblatt 3, Aufgabe 2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \frac{1}{2}.$$

Übungsblatt 3, Aufgabe 3:

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^m dx, \quad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Und

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}.$$