

① $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume

Überprüfe Normeigenschaften.

1- Positivität: $\|T\| = \sup \{ \|Tx\|_F, x \in E, \|x\|_E = 1 \}$

Für alle $x \in E$ gilt: $\|Tx\|_F \geq 0$

$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F \geq 0$

2- $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T=0$

① Falls $T=0$. Dann gilt für alle $x \in E$ mit

$\|x\|_E=1: \|Tx\|_F \leq \|T\|=0 \Rightarrow$ Also $\|Tx\|_F=0$

Nach der Normeigenschaft, folgt $Tx=0$.

Nun sei $y \in E$ beliebig.

② Falls $y=0$, dann gilt wegen Linearität:

$T(y)=T(0)=0$

③ Falls $y \neq 0$. Setzen wir $x := \frac{y}{\|y\|_E}$

Dann gilt $\|x\|_E=1$

Also ist $Tx=0$. Damit: $T\left(\frac{y}{\|y\|_E}\right)=0$

Wegen Linearität: $\frac{1}{\|y\|_E} T(y)=0 \Rightarrow$ Also $T(y)=0$
für alle $y \in E$, also $T=0$

④ Falls $\|T\|=0 \Leftrightarrow T=0$

③. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|\lambda Tx\|_F$

Da $(\lambda T)x = \lambda Tx$ gilt $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|\lambda Tx\|_F$

Mit der Normeigenschaft: $\|\lambda T\| = |\lambda| \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$

$= |\lambda| \cdot \|T\|$

$= |\lambda| \cdot \|T\|$

4- Dreiecksungleichung: $\|T+S\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|(T+S)x\|_F$

Seien $S, T \in L(E, F)$. Dann gilt für $x \in E$ mit $\|x\|_E=1$

$\|(T+S)x\|_F = \|Tx + Sx\|_F$

$\Rightarrow \|Tx + Sx\|_F \leq \|Tx\|_F + \|Sx\|_F$

$\Rightarrow \|T+S\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|(T+S)x\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} (\|Tx\|_F + \|Sx\|_F)$

$|\lambda| \|Tx\|_F \leq |\lambda| \|T\|$

$|\lambda| \|Tx\|_F \leq |\lambda| \|T\|$

2. Fall:

$\| \cdot \|_1 \rightarrow \| \cdot \|_\infty$

$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, n} |a_{ij}|$

$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} | \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j |$

$\leq \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j|$

$\leq \left(\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \max_{j=1, \dots, n} |x_j|$

$= \left(\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$

② Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Formel: A :

Fälle

i) $p=1, q=1$

ii) $p=1, q=\infty$

iii) $p=\infty, q=1$

2. Fall:

$$\| \cdot \|_1 \longrightarrow \| \cdot \|_\infty$$

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, m} |a_{ij}|$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \right|$$

$$\leq \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \cdot |x_j| \quad \|x\|_1$$

$$\leq \left(\max_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, m} |a_{ij}| \right) \left(\sum_{j=1}^m |x_j| \right)$$

$$= \left(\max_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, m} |a_{ij}| \right) \|x\|_1$$

3. Fall:

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right)$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \right|$$

$$\leq \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \cdot |x_j|$$

$$= \left(\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$$

$$\|Ax\|_\infty \geq \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \right| = \sum_{j=1}^m |a_{ij}| = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

$$x_j = \begin{cases} 1, & a_{ij} \geq 0 \\ -1, & a_{ij} < 0 \end{cases}$$

② Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Finde und beweise eine Formel: $A: (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$
 $x \longmapsto Ax$

Fälle

i) $p=1, q=1$

ii) $p=1, q=\infty$

iii) $p=\infty, q=\infty$

Berechne dann

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 9 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Fall $p=q=1$: $\|A\| = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

$$\|Ax\| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \cdot |x_j|$$

$$= \sum_{j=1}^m |x_j| \cdot \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\leq \left(\max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_1$$

$$\text{wobei } x = e_j \quad \|Ax\| = \|Ae_j\|$$

Wähle j_0 :

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 9 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spaltensumme

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |a_{i1}| &= |3| + |9| + |0| = 12 \\ |a_{i2}| &= 12 \\ |a_{i3}| &= 1 \end{aligned} \right\} = 12$$

$$\max |a_{ij}| = 9 \rightarrow \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, m} |a_{ij}| = 9$$

$$\|A\|_{1 \rightarrow \infty} = 9$$

Zeilensumme

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |a_{1j}| &= 11 \\ |a_{2j}| &= 13 \\ |a_{3j}| &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|A\|_{\infty \rightarrow \infty} = 13$$

$$\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_1 \rightarrow \text{Spaltensumme} \sim \text{dann max}$$

$$\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_{\infty} \rightarrow \text{Höchsteneintrag in } |\cdot|$$

$$\|\cdot\|_{\infty} \rightarrow \|\cdot\|_{\infty} \rightarrow \text{Zeilensumme} \sim \text{dann max}$$