

① Metrische Räume $(X, d_x), (Y, d_y)$

$f_n: X \rightarrow Y$ eine Folge stetiger Funktionen f_n stetig $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gfm. gegen f

$f: X \rightarrow Y$ mit $f_n \xrightarrow{ab} f$

Zeige: f ist stetig. $d(x, x_0) < \delta$

$x \in U_{x_0}(\text{aus } f) \rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0))$$

$$\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

② $(X, d), K \subseteq X$ kompakt. Zeige:

$\supset A \subseteq K$ abg. $\Rightarrow A$ kompakt

K kompakt $\Leftrightarrow K$ ist abg. und beschränkt $\subset$

Da $A \subseteq K$ ist A beschränkt durch $\subset$

Damit A abg. und beschränkt $\Leftrightarrow A$ kompakt

③ $A \subseteq X$ abg. $\Rightarrow A \cap K$ kompakt

$A \cap K$ abg. und mit ② gilt $A \cap K$ kompakt

ii) Beweise, $\exists g: X \rightarrow Y$ mit g' stetig
 $\hookrightarrow$ (stetig $\wedge$ bijektiv)

Sei $t \in X$ beliebig, f fest

Fall 1: $t \in [0, \pi]$

$$g(f(t)) = g(\cos(t), \underbrace{\sin(t)}_{\geq 0}) = \arccos(\cos(t))$$

$$= t, \text{ da } t \in [0, \pi]$$

Fall 2: $t \in (\pi, 2\pi]$

$$g(f(t)) = g(\cos(t), \underbrace{\sin(t)}_{\leq 0}) = 2\pi - \arccos(\cos(t)) = 2\pi - \underbrace{\arccos(-(-\cos(t)))}_{=\arccos(-\cos(t)) - \pi} = t$$

ii) $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume und X kompakt

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Zeige: f' stetig

$$= 2\pi + \arccos(-\cos(t)) - \pi = \pi + \arccos\left(\frac{-\cos(t)}{\cos(t-\pi)}\right) = \pi + \arccos(\cos(\frac{t-\pi}{\pi})) = \pi + t - \pi = t$$

$$\Rightarrow g \circ f = \text{id}_X$$

Sei $(x, y) \in Y$ beliebig, fest

Fall 1: $y \geq 0$

$$f(g(x, y)) = f(\arccos(x)) = (\cos(\arccos(x)), \sin(\arccos(x))) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (x, |y|) = (x, y)$$

③ $X = [0, 2\pi]$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $f: X \rightarrow Y$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$

1) Zeige: f stetig, bijektiv $\wedge f'$ nicht stetig

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t)) = (f_1(t), f_2(t))$$

mit $f_1 = \cos$, $f_2 = \sin$ stetig

$\Rightarrow f$ stetig

$$g: Y \rightarrow X, g(x, y) = \begin{cases} \arccos(x), & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(x), & y < 0 \end{cases}$$

Für $(x, y) \in Y$ ist $x \in [-1, 1]$, also $\arccos(x)$ wohldef.

Da $\arccos(x) \in [0, \pi] \forall x \in [-1, 1]$,

$$2\pi - \arccos(x) \in [\pi, 2\pi]$$

$\arccos(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Für $(1, y) \in Y$ gilt

$y = 0$, also $\arccos(x) \geq 0$ für $(x, y) \in Y$ mit $y \geq 0$

$$\Rightarrow g(x, y) \in [0, 2\pi] \forall (x, y) \in Y$$

$\Rightarrow g$ wohldef.

Fall 2: $y < 0$

$$f(g(x, y)) = f(2\pi - \arccos(x)) = (\cos(2\pi - \arccos(x)), \sin(2\pi - \arccos(x))) = (\cos(\arccos(x)), -\sin(\arccos(x)))$$

$$= (x, -\sqrt{1-x^2}) = (x, -|y|) = (x, y)$$

$$\Rightarrow f \circ g = \text{id}_Y$$

③ Annahme: $f: X \rightarrow Y$ stetig und bij., X kompakt

Aussage: $f^{-1}Y \rightarrow X$ stetig $(\Rightarrow A \subset X \text{ } (f^{-1}(A))^c \text{ offen } (\Rightarrow A \subset X \text{ } f(A) \text{ offen})$

Beweis: Sei $A \subset X$ offen $\Rightarrow X \setminus A$ abgeschlossen, $X \setminus A \in X \Rightarrow X \setminus A$ kompakt

13.41: $f(X \setminus A)$ kompakt $\Rightarrow f(X \setminus A)$ abgeschlossen $\Rightarrow Y \setminus f(X \setminus A)$ offen

$$f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$$

$$\forall a \in X \setminus A: f(a) \notin f(A) \Rightarrow f(a) \in Y \setminus f(A) \quad \Rightarrow \quad Y \setminus (f(X) \setminus f(A)) = Y \setminus Y \setminus f(A) = f(A) \text{ offen}$$