

Wichtige Informationen

1. Das Tutorium am 30.01.2026 wird in 2 geteilt.

- * Die ersten 45-50 Minuten Vortieraufgaben

- * Die letzten 45-50 Minuten Mini-Klausur.

keine Probeklausur! Es werden Ideen,
Techniken und Lösungsschema abgefragt.
Nur paar kleine Beweise

2. Das Tutorium am 06.02.2026 wird 120 Minuten dauern.

- * Start: 08:00 Ende: 10:00

- * Alte Klausuraufgaben werden diskutiert

3. Falls du Interesse an 1. und 2. hast, bitte eine E-Mail bis 25.01.2026:

- * An: mirkanderitz52@gmail.com, Betreff: Analysis-Tutorium

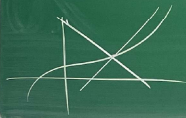
- * Inhalt: Deine Themenwünsche, Feedback und ob du überhaupt Interesse daran hast.

$$(d) |z_{n+1} - z_n| \leq L^{n+1} |z_2 - z_1|$$

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|, \quad 0 < L < 1, \quad 1 - L < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-L} > 1 \quad \text{IA.}$$

$$(b) |z_{n+m} - z_n| \leq \frac{L}{1-L} |z_2 - z_1| \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{L}{1-L} |z_2 - z_1| > L^{n+1} |z_2 - z_1| \geq |z_{n+1} - z_n|$$



$$\frac{L^{n+1} \cdot (1 - L^{n+1})}{1 - L} \cdot |z_2 - z_1|$$

$$\text{IV. } \exists m \in \mathbb{N} \quad \text{...}$$

$$|f(z_{n+m}) - f(z_n)| \leq L |z_{n+m} - z_n|$$

$$\text{IS: } (m \geq m+1)$$

$$|z_{n+m+1} - z_n| = |z_{n+m+1} - z_{n+1} + z_{n+1} - z_n| \leq \underbrace{|z_{n+m+1} - z_{n+1}|}_{f(z_{n+m}) - f(z_n)} + |z_{n+1} - z_n|$$

$$< L |z_{n+m} - z_n| + L^{n+1} |z_2 - z_1| < \left(\frac{L^n}{1-L} + L^{n+1} \right) |z_2 - z_1| = \frac{L^n}{1-L} |z_2 - z_1|$$

$$\frac{L^n + L^{n+1}(1-L)}{1-L} = \frac{L^n + L^n - L^{n+1}}{1-L} = \frac{L^n}{1-L}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(c)} \quad \exists z \mid \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \\
 & \quad \quad \quad r > n, r, n \in \mathbb{N}, r - n > 0 \\
 & \quad \quad \quad \forall \epsilon > 0, \exists N < \infty \mid \forall n > N, \forall r > n, \exists z \mid |z_n - z_r| < \epsilon \\
 & \quad \quad \quad |z_{n+m} - z_n| < \frac{L}{1-L} |z_2 - z_1| < \epsilon \\
 & \quad \quad \quad N = \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\epsilon \frac{1-L}{L |z_2 - z_1|}\right) < n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & L < 1 \\
 & \Rightarrow \ln(L) < 0 \\
 & \ln\left(\epsilon \frac{1-L}{L |z_2 - z_1|}\right) > \ln(L) n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \epsilon \frac{1-L}{L |z_2 - z_1|} > \exp(\ln(L) n) = L^n \\
 & \Rightarrow \epsilon L > L^n |z_2 - z_1|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \epsilon > \frac{L^{n-1}}{1-L} |z_2 - z_1|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(d)} \quad f(z) = z^z \\
 & \quad \quad \quad f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \\
 & \quad \quad \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} \\
 & \quad \quad \quad = z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(e)} \quad \exists w \in \mathbb{C} \\
 & \quad \quad \quad f(w) = w, w \neq z \\
 & \quad \quad \quad |w - z| = |f(w) - f(z)| \neq 0 \\
 & \quad \quad \quad 1 \leq L \leq L |w - z|
 \end{aligned}$$

Übung 3.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \vee x=0 \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Lösung: stetig $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\boxed{\mathbb{R}: X_1}$
 nicht stetig $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\boxed{\mathbb{R}: X_2}$

Sei $\{r_n\}$ eine Folge von den Fkt. $r_n \rightarrow x$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n) = 0 \neq f(x)$

für $a \in \mathbb{Q}$ $a = \frac{p}{q}$ $f(a) = \frac{1}{q}$
 Sei $\varepsilon = \frac{1}{q}$
 für beliebiges $\delta > 0$ Sei $N > \frac{1}{\delta}$, $N \in \mathbb{N}$.

$x = a + \frac{\sqrt{2}}{N}$
 da steht N die Aussage $\varepsilon = \frac{1}{q}$
 $|x - a| = \frac{\sqrt{2}}{N} > \delta \wedge |f(x) - f(a)| = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ nicht stetig.

für $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

wenn $x, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dann $f(x) = f(a) = 0$ $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

stetig, keine weitere Argumente nötig
 trivial

Wenn $x \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

z.B. $\delta = |a - \frac{1}{N}|$

$\varepsilon = \min \left\{ |a - \frac{1}{3}|, |a - \frac{2}{3}| \right\}$

$\delta_N = \min \left\{ |a - \frac{1}{N}|, \dots, |a - \frac{N-1}{N}| \right\}$

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(x)| < \frac{1}{N} < \varepsilon$

$\square$

$\forall \varepsilon > 0$, nehme ich $N \in \mathbb{N}$, an
 steht $\frac{1}{N} < \varepsilon$