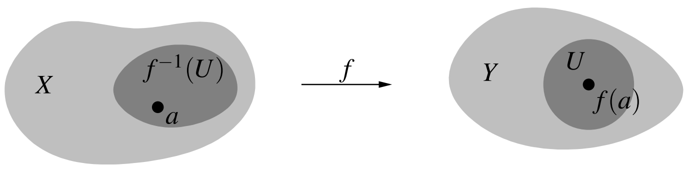
2. Stetige Abbildungen

Nachdem wir im letzten Kapitel topologische Räume eingeführt haben, wollen wir nun Abbildungen zwischen solchen Räumen untersuchen. Wie schon in der Einleitung erwähnt sind in der Topologie vor allem die *stetigen* Abbildungen wichtig — in der Tat war die Definition eines topologischen Raumes ja gerade so motiviert, dass man damit das Konzept von stetigen Abbildungen formulieren kann. Zur Definition stetiger Abbildungen verwenden wir die folgende Bedingung, die sich in der Sprache der topologischen Räume formulieren lässt und von der wir bereits wissen, dass sie in metrischen Räumen zur ε-δ-Stetigkeit äquivalent ist [G2, Lemma 24.19]:

Definition 2.1 (Stetigkeit)**.** Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.

(a) f heißt **stetig** in einem Punkt $a \in X$, wenn zu jeder Umgebung U von $f(a)$ in Y das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a in X ist.

(b) f heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist.



Bemerkung 2.2.

(a) In der Tat genügt es für die Stetigkeit von f in a, die Bedingung aus Definition 2.1 (a) für jede *offene* Umgebung U, bzw. im Fall einer durch eine Basis gegebenen Topologie für jede *basis-offene* Umgebung von $f(a)$ nachzuprüfen: Ist V dann nämlich eine beliebige Umgebung von $f(a)$, so enthält diese nach Definition 1.18 (a) bzw. Bemerkung 1.19 eine (basis-)offene Umgebung U von $f(a)$. Wissen wir nun, dass $f^{-1}(U)$ dann eine Umgebung von a ist, so ist $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(U)$ damit natürlich erst recht eine Umgebung von a.

(b) Ein Konzept der *gleichmäßigen Stetigkeit* wie in [G2, Definition 8.34 (b) und Definition 24.32 (a)] lässt sich für Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen nicht definieren, da es keine Möglichkeit gibt, Umgebungen von verschiedenen Punkten „größenmäßig miteinander zu vergleichen“.

Bemerkung 2.3 (Stetigkeit in metrischen Räumen [G2, Lemma 24.19])**.** Sind X und Y metrische Räume, so ist die Definition 2.1 (a) der Stetigkeit einer Abbildung $f\colon X \to Y$ in einem Punkt $a \in X$ wie oben schon erwähnt äquivalent zum gewohnten ε-δ-Kriterium [G2, Lemma 24.19]. Der Vollständigkeit halber sei hier noch einmal ein Beweis dafür gegeben: Zunächst einmal sieht man mit dem gleichen Argument wie in Bemerkung 2.2, dass es genügt, die Bedingung aus Definition 2.1 (a) für ε-Kugeln $U_\varepsilon(f(a))$ um $f(a)$ zu zeigen. Die Bedingung besagt dann aber gerade, dass das Urbild $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ eine Umgebung von a ist, also äquivalent dazu eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$ von a enthält. Dies bedeutet aber doch genau

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a)),$$

was genau das ε-δ-Kriterium ist.

Möchte man von einer Abbildung nicht unbedingt genau wissen, in welchen Punkten sie stetig ist und in welchen nicht, sondern nur, ob sie in *allen* Punkten stetig ist, so gibt es hierfür ein Kriterium, das oft viel einfacher anzuwenden ist als Definition 2.1. Auch dieses Kriterium, das wir im folgenden Satz beweisen wollen, ist euch vermutlich zumindest zum Teil schon für den Fall von Abbildungen zwischen metrischen Räumen aus den Grundlagen der Mathematik bekannt [G2, Satz 24.20].

Satz 2.4 (Kriterien für Stetigkeit)**.** *Für eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist stetig.*

(b) *Für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X („Urbilder offener Mengen sind offen“).*

(c) *Für alle Basen $\mathscr{B}$ der Topologie auf Y gilt: Für alle $U \in \mathscr{B}$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X („Urbilder basis-offener Mengen sind offen“).*

(d) *Es gibt eine Basis $\mathscr{B}$ der Topologie auf Y, für die gilt: Für alle $U \in \mathscr{B}$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X.*

(e) *Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X („Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen“).*

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Es seien f stetig, $U \subset Y$ offen und $a \in f^{-1}(U)$, also $f(a) \in U$. Dann ist U eine Umgebung von $f(a)$, und damit ist $f^{-1}(U)$ nach Definition 2.1 (a) eine Umgebung von a. Es gibt also eine offene Menge V_a in X mit $a \in V_a \subset f^{-1}(U)$. Vereinigen wir nun diese Mengen V_a für alle $a \in f^{-1}(U)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &\subset \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a && (\text{denn } a \in V_a \text{ für alle } a \in f^{-1}(U)) \\ &\subset f^{-1}(U) && (\text{wegen } V_a \subset f^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Also gilt hier die Gleichheit, und $f^{-1}(U)$ ist als Vereinigung offener Mengen offen.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“ ist trivial, da basis-offene Mengen immer auch offen sind.

„(c) $\Rightarrow$ (d)“ ist ebenfalls trivial (wähle z. B. für $\mathscr{B}$ die Basis aller offenen Mengen).

„(d) $\Rightarrow$ (a)“: Es seien $a \in X$ beliebig und U eine Umgebung von $f(a)$ in Y. Dann gibt es nach Bemerkung 1.19 eine basis-offene Menge V in Y mit $f(a) \in V \subset U$. Da Urbilder basis-offener Mengen unter f nach (d) offen sind, ist $f^{-1}(V)$ nun offen in X. Wegen $a \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ ist $f^{-1}(U)$ damit eine Umgebung von a in X. Also ist f stetig in a.

„(b) $\Leftrightarrow$ (e)“: Dies ergibt sich sofort durch Übergang zum Komplement, da

$$f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$$

für jede (offene) Teilmenge U von Y gilt. □

Bemerkung 2.5. In vielen Büchern über Topologie wird die Stetigkeit von Abbildungen über das Kriterium von Satz 2.4 (b) *definiert*. Dies ist zwar einfacher hinzuschreiben als unsere Definition 2.1, hat aber den entscheidenden Nachteil, dass man dieser Definition nicht ansieht, dass Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, d. h. dass man Stetigkeit *in einem Punkt* definieren kann und eine Abbildung damit genau dann stetig ist, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

Beispiel 2.6. Aufgrund von Bemerkung 2.3 übertragen sich natürlich alle Beispiele und Gegenbeispiele für stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, die ihr aus den „Grundlagen der Mathematik“ kennt, sofort auf unsere neue Definition. Hier sind noch ein paar weitere Beispiele:

(a) Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist *immer* stetig, wenn X die diskrete Topologie hat — denn dann ist ja *jede* Teilmenge von X offen und somit das Kriterium von Satz 2.4 (b) immer erfüllt. Ebenso ist f immer stetig, wenn Y die indiskrete Topologie hat, denn dann sind $\emptyset$ und Y die einzigen offenen Mengen in Y, und somit ist auch hier wegen $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$ das Kriterium aus Satz 2.4 (b) immer erfüllt.

(b) Es sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes X. Wie üblich fassen wir Y mit der Teilraumtopologie aus Konstruktion 1.6 selbst wieder als topologischen Raum auf. Wir betrachten die Inklusionsabbildung

$$i: Y \to X,\ a \mapsto a.$$

Ist $U \subset X$ offen, so ist natürlich $i^{-1}(U) = Y \cap U$, und diese Menge ist nach Definition der Teilraumtopologie offen in Y. Also ist i nach Satz 2.4 „(b) $\Rightarrow$ (a)“ stetig. In der Tat sind *genau* die Mengen dieser Form offen in Y — was man auch so formulieren kann, dass die Teilraumtopologie die *gröbste* Topologie auf Y ist, für die die Inklusionsabbildung $i\colon Y \to X$ stetig ist.

(c) Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so ist auch die Verkettung $g \circ f\colon X \to Z$ stetig — dies ergibt sich z. B. sofort aus dem Stetigkeitskriterium aus Satz 2.4 (b).

Aufgabe 2.7. Es sei $\mathscr{T}$ die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik auf $\mathbb{R}^2$ aus Beispiel 1.5 (a).

(a) Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}^2$ die einpunktige Menge $\{x\}$ genau dann offen bzgl. $\mathscr{T}$ ist, wenn $x \neq 0$ ist.

(b) Bestimme eine (möglichst einfache) Basis der Topologie $\mathscr{T}$.

(c) In welchen Punkten ist die Abbildung $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$ stetig?

Aufgabe 2.8. Es sei $\mathscr{T}$ die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ (siehe Beispiel 1.17).

(a) Welche der Intervalle $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) sind abgeschlossen in $\mathscr{T}$?

(b) Zeige, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ genau dann rechtsseitig stetig ist, also $\lim_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} f(x) = f(a)$ gilt, wenn sie als Abbildung $f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie im Zielraum) in a stetig ist.

Aufgabe 2.9. Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Man zeige:

(a) Sind $U_1, \dots, U_n$ offene Mengen in X mit $U_1 \cup \cdots \cup U_n = X$ und ist $f|_{U_i}$ stetig für alle i, so ist f stetig.

(b) Sind $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossene Mengen in X mit $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$ und ist $f|_{A_i}$ stetig für alle i, so ist f stetig.

Gelten diese Aussagen auch noch für Überdeckungen von X durch unendlich viele Teilmengen?

Aufgabe 2.10 (Stetigkeit $\neq$ Folgenstetigkeit)**.** In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass man die Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen im Allgemeinen *nicht* mit Hilfe von Folgen überprüfen kann — im Gegensatz zum Fall von metrischen Räumen [G2, Bemerkung 24.5 (b)]. Aus diesem Grund spielen Folgen in der Topologie auch eine viel geringere Rolle als in der Analysis. (Man bräuchte hier stattdessen den Begriff eines sogenannten *Filters*, den man sich als geeignet verallgemeinerten Folgenbegriff vorstellen kann [Q, Kapitel 5C] — wir wollen darauf in dieser Vorlesung jedoch nicht weiter eingehen.)

(a) Man zeige: In der Komplement-abzählbar-Topologie aus Beispiel 1.5 (c) konvergiert eine Folge (x_n) in X genau dann gegen ein $a \in X$, wenn $x_n = a$ für fast alle n gilt. (Wie ist eigentlich Folgenkonvergenz in einem topologischen Raum definiert?)

(b) Gib ein Beispiel für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen an, die in einem Punkt $a \in X$ zwar das Folgenkriterium

$$\text{für jede Folge } (x_n) \text{ in } X \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to f(a)$$

erfüllt, die aber dennoch *nicht* stetig in a ist.

Ein weiteres interessantes und wichtiges Beispiel zu stetigen Abbildungen ergibt sich bei der Untersuchung der Produkttopologie aus Konstruktion 1.15. Es ist die direkte Übertragung der aus den „Grundlagen der Mathematik“ bekannten Aussage, dass die Stetigkeit einer Abbildung von einem metrischen Raum nach $\mathbb{R}^n$ komponentenweise im Zielraum überprüft werden kann [G2, Lemma 24.7]. Wir formulieren es hier als eigenes Lemma.

Lemma 2.11 (Stetige Abbildungen in Produkte)**.** *Es seien X und Y topologische Räume sowie $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ die Projektionsabbildungen. Dann gilt:*

(a) *π_X und π_Y sind stetig.*

(b) *Eine Abbildung $f : Z \to X \times Y$ von einem topologischen Raum Z in das Produkt $X \times Y$ ist genau dann stetig, wenn die beiden Komponentenabbildungen $f_X := \pi_X \circ f : Z \to X$ und $f_Y := \pi_Y \circ f : Z \to Y$ stetig sind.*

Beweis.

(a) Ist $U \subset X$ offen, so ist das Urbild $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ nach Definition der Produkttopologie offen in $X \times Y$. Also ist π_X (und analog auch π_Y) stetig nach Satz 2.4 (b).

(b) „$\Rightarrow$“: Ist f stetig, so sind nach (a) natürlich auch f_X und f_Y als Verkettungen stetiger Abbildungen stetig (siehe Beispiel 2.6 (c)).

„$\Leftarrow$“: Es seien f_X und f_Y stetig. Nach Satz 2.4 „(d) $\Rightarrow$ (a)“ genügt es zu zeigen, dass Urbilder unter f von Mengen der Form $U \times V$ für offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ wieder offen sind. In der Tat ist nun

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z : f(z) \in U \times V\} = \{z \in Z : f_X(z) \in U \text{ und } f_Y(z) \in V\} \\ &= f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V) \end{aligned}$$

nach Satz 2.4 (b) offen, da f_X und f_Y als stetig vorausgesetzt wurden. □

Bemerkung 2.12 (Initialtopologien)**.** Man kann leicht überprüfen, dass die Eigenschaft aus Lemma 2.11 (b) die Produkttopologie eindeutig charakterisiert, d. h. dass die Produkttopologie die einzige Topologie auf $X \times Y$ ist, mit der diese Aussage richtig ist. Man nennt dies daher die *universelle Eigenschaft der Produkttopologie*. Analog rechnet man leicht nach, dass die Produkttopologie die gröbste Topologie auf $X \times Y$ ist, bezüglich derer die Aussage aus Lemma 2.11 (a) gilt.

In der Tat ist dies ein spezieller Fall einer sogenannten *Initialtopologie*: Hat man eine Familie topologischer Räume $\{X_i\}$, eine Menge Y und Abbildungen $\pi_i : Y \to X_i$ gegeben, so definieren diese Daten eine sogenannte Initialtopologie auf Y als die gröbste Topologie auf Y, bezüglich derer alle π_i stetig sind, oder alternativ als die eindeutig bestimmte Topologie auf Y, so dass eine Abbildung $f : Z \to Y$ von einem beliebigen topologischen Raum Z genau dann stetig ist, wenn alle Verkettungen $\pi_i \circ f : Z \to X_i$ es sind. Wir werden diese allgemeinen Initialtopologien in dieser Vorlesung aber nicht weiter untersuchen.

Es gibt auch eine entsprechende „duale“ Version mit „umgekehrten Pfeilrichtungen“, die sogenannten Finaltopologien (siehe Bemerkung 5.7).

Von besonderer Bedeutung sind die Abbildungen, die nicht nur stetig sind, sondern auch noch eine stetige Umkehrabbildung besitzen. Sie haben einen besonderen (und nicht besonders schönen) Namen:

Definition 2.13 (Homöomorphismen)**.** Es seien X und Y topologische Räume.

(a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist, und die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig ist.

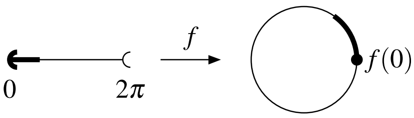
(b) Die Räume X und Y heißen **homöomorph** (in Zeichen: $X \cong Y$), wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.

Bemerkung 2.14.

(a) Nach dem Stetigkeitskriterium aus Satz 2.4 (b) ist eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie bijektiv ist und unter f sowohl Urbilder als auch Bilder (die man ja dann als Urbilder von f^{-1} auffassen kann) offener Mengen wieder offen sind. Anders ausgedrückt ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und die offenen Mengen von X und Y eins zu eins aufeinander abbildet. Da die offenen Mengen ja aber gerade das sind, was eine Topologie definiert, heißt das also, dass zwei topologische Räume genau dann homöomorph sind, wenn sie topologisch ununterscheidbar sind. Homöomorphe Räume werden daher auch oft als *topologisch isomorph* oder *topologisch äquivalent*, Homöomorphismen als *topologische Isomorphismen* bezeichnet. Sie spielen in der Topologie dieselbe Rolle wie z. B. in der Algebra die Isomorphismen von Gruppen oder Vektorräumen.

(b) In der Definition eines Homöomorphismus ist die Bedingung, dass f^{-1} ebenfalls stetig ist, nicht überflüssig — im Gegensatz z. B. zur Theorie von Vektorräumen, wo die Umkehrabbildung eines bijektiven Homomorphismus ja stets automatisch wieder ein Homomorphismus ist. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Abbildung

$$f\colon [0,2\pi) \to S^1 \subset \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{it},$$

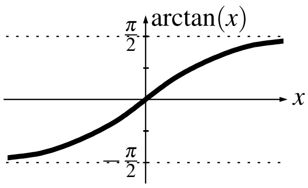


die das halboffene Intervall von 0 bis 2π in $\mathbb{R}$ stetig und bijektiv auf den Rand des Einheitskreises S^1 in $\mathbb{C}$ abbildet. Für diese Abbildung ist f^{-1} nicht stetig, da das Bild einer kleinen Umgebung von $0 \in [0,2\pi)$ unter f (wie im Bild oben dick eingezeichnet) keine Umgebung des Bildpunktes $f(0)$ ist und f^{-1} damit nicht das Kriterium aus Definition 2.1 (a) erfüllt. (Natürlich ist auch anschaulich klar, dass ein Intervall durchaus topologisch von einer Kreislinie unterscheidbar und somit f kein Homöomorphismus sein sollte.)

Wir werden in Folgerung 4.14 allerdings noch ein einfaches hinreichendes Kriterium dafür kennenlernen, wann eine stetige bijektive Abbildung bereits ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 2.15 (Beispiele homöomorpher Räume)**.**

(a) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $x \mapsto \arctan x$ wie im Bild rechts ist bekanntlich bijektiv und stetig (in der Standardtopologie), genau wie ihre Umkehrabbildung $f^{-1}\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$. Also ist f ein Homöomorphismus, d. h. $\mathbb{R}$ ist (mit der Standardtopologie) topologisch äquivalent zum offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ — und analog natürlich auch zu jedem anderen offenen Intervall.

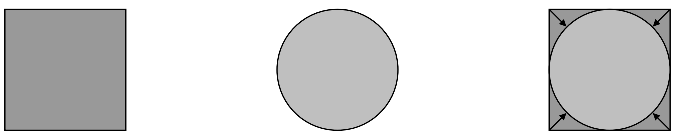


Wir schließen daraus, dass die Topologie in diesem Sinne nicht zwischen „unterschiedlich großen" Räumen unterscheiden kann, auch nicht zwischen solchen „mit endlicher und unendlicher Ausdehnung".

(b) Es seien $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sowie

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 \le 1\} \quad \text{und} \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_2 \le 1\}$$

die zugehörigen Einheitskugeln [G2, Definition 23.1]. Im Bild unten ist dies für die Maximumsnorm $||\cdot||_1$ und die euklidische Norm $||\cdot||_2$ in der Ebene dargestellt, so dass die beiden Einheitskugeln ein (abgeschlossenes) Quadrat bzw. ein (abgeschlossener) Kreis sind [G2, Beispiel 23.3].



X_1 $\qquad$ X_2 $\qquad$ $f: X_1 \to X_2$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$f\colon X_1 \to X_2,\ x \mapsto \begin{cases} \frac{||x||_1}{||x||_2} \cdot x & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

die jeden Vektor um einen variablen Faktor streckt. Sie erfüllt offensichtlich $||f(x)||_2 = ||x||_1$ für alle $x \in X_1$. Daraus folgt sofort:

- Aus $x \in X_1$, also $||x||_1 \leq 1$, ergibt sich auch $||f(x)||_2 \leq 1$ und damit $f(x) \in X_2$. Also bildet f wirklich wie behauptet X_1 auf X_2 ab.
- Die Abbildung f ist stetig: Bekanntlich können wir dies mit dem ε-δ-Kriterium in einer beliebigen Norm überprüfen, da alle Normen die Standardtopologie erzeugen [G2, Bemerkung 24.5 (b)]. Insbesondere können wir im Start- und Zielraum auch unterschiedliche Normen wählen — in diesem Fall $|| \cdot ||_1$ im Startraum und $|| \cdot ||_2$ im Zielraum. Dann besagt die Gleichung $||f(x)||_2 = ||x||_1$ aber gerade $||f(x)||_2 < \varepsilon$ für alle $x \in X_1$ mit $||x||_1 < \varepsilon$, womit f in 0 stetig ist. Die Stetigkeit in den anderen Punkten folgt natürlich einfach daraus, dass Normen stetig sind [G2, Beispiel 24.3] und f dort somit aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.

Da f offensichtlich bijektiv ist mit Umkehrabbildung $f^{-1}: x \mapsto \frac{||x||_2}{||x||_1} \cdot x$, ist f^{-1} mit dem gleichen Argument ebenfalls stetig. Also ist f ein Homöomorphismus, die beiden Einheitskugeln X_1 und X_2 sind (in der Standardtopologie) homöomorph.

Wir können dieses Ergebnis so interpretieren, dass die Topologie „keine Formen oder Ecken sieht“: Ein Quadrat ist z. B. topologisch äquivalent zu einem Kreis.

Aufgabe 2.16. Es seien D ein Dreieck und K ein (abgeschlossener) Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie. Zeige, dass D und K homöomorph sind. 02

Beispiel 2.17 (Beispiele nicht-homöomorpher Räume)**.**

(a) Zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ gibt es zwar bekanntlich bijektive Abbildungen (da beides abzählbar unendliche Mengen sind), als Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Relativtopologie betrachtet sind sie jedoch nicht homöomorph: Angenommen, wir hätten einen Homöomorphismus $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ nach Beispiel 1.8 (b) die diskrete Topologie trägt und die einelementige Menge $\{0\}$ damit offen in $\mathbb{Z}$ ist, müsste die ebenfalls einelementige Menge $f^{-1}(\{0\})$ nach Satz 2.4 (b) dann auch offen in $\mathbb{Q}$ sein — was ein Widerspruch ist, da Punkte in $\mathbb{Q}$ nicht offen sind. Es gibt also nicht einmal eine stetige und bijektive Abbildung $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.

(b) Man kann zeigen, dass die Topologie „Dimensionen unterscheiden kann“: So sind z. B. die Räume $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ alle topologisch verschieden, also paarweise nicht zueinander homöomorph. Dies ist jedoch schon ein schwieriges Resultat der algebraischen Topologie, von dem wir in dieser Vorlesung in den Beispielen 3.9 (a) und 8.17 nur die Spezialfälle beweisen können, dass $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ nicht zu den anderen $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind. Die Situation ist dabei deutlich komplizierter als man zunächst annehmen würde: Dass z. B. $\mathbb{R}^1$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist, liegt nicht etwa daran, dass $\mathbb{R}^2$ „zu groß“ ist, um mit einer stetigen Abbildung durch $\mathbb{R}^1$ ausgefüllt zu werden. Es gibt nämlich durchaus stetige und surjektive Abbildungen von $\mathbb{R}^1$ nach $\mathbb{R}^2$, wie wir gleich in Satz 2.18 und Aufgabe 2.19 (b) sehen werden. In der Tat macht die Existenz derartig „wilder“ stetiger Abbildungen einige Beweise in der Topologie deutlich schwieriger, als man sich das wünschen würde.

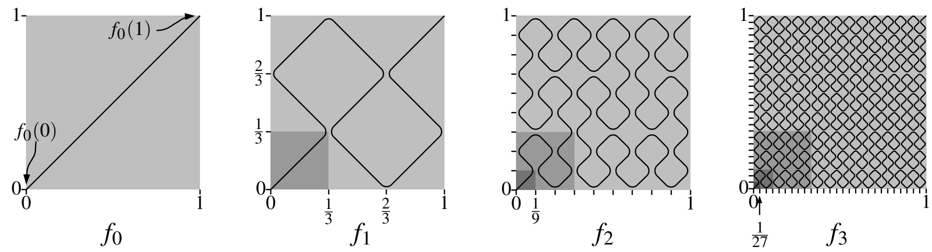
Satz 2.18 (Peano-Kurve)**.** *Es gibt eine stetige und surjektive Abbildung von $I^1 := [0,1] \subset \mathbb{R}$ nach $I^2 := [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Man bezeichnet eine solche Abbildung, also eine „flächenfüllende Kurve“, als Peano-Kurve.*

Beweisskizze. Da die Peano-Kurven für uns eigentlich nur als „abschreckendes Beispiel“ dienen, werden wir den Beweis dieses Satzes hier nur skizzieren, so dass man die Idee hinter der Konstruktion erkennen kann. Einen exakten Beweis könnt ihr in [G2, Satz 24.39] finden.

Wir konstruieren die gesuchte stetige surjektive Funktion $f: I^1 \to I^2$ als Grenzwert einer rekursiv definierten Funktionenfolge (f_n) mit $f_n: I^1 \to I^2$. Dabei ist f_0 einfach die Gerade

$$f_0: I^1 \to I^2,\ t \mapsto (t,t),$$

die das Einheitsquadrat mit konstanter Geschwindigkeit von links unten nach rechts oben durchläuft. Für die nächste Funktion f_1 teilen wir I^2 in 9 gleich große Teilquadrate entlang der horizontalen und vertikalen Linien bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und durchlaufen nun diese 9 Teilquadrate der Reihe nach entlang ihrer Diagonalen wie im Bild unten dargestellt. Die Abbildung f_1 besteht also aus 9 Geradenstücken, die alle mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen werden — ihr Bild unten ist an den Ecken nur deswegen abgerundet eingezeichnet, damit den Verlauf besser erkennen kann. Beachte, dass die zurückgelegte Strecke von f_1 dreimal so lang ist wie bei f_0 und der Weg daher mit dreifacher Geschwindigkeit durchlaufen wird.



Die nächste Abbildung f_2 entsteht nun aus f_1, indem wir wie im Bild oben jedes der 9 Geradenstücke von f_1 (z. B. das in dem dunkel eingezeichneten Teilquadrat) durch einen Weg ersetzen, der selbst wieder wie f_1 aussieht. Entsprechend ersetzen wir dann jedes der Geradenstücke von f_2 durch einen Weg wie f_1, um f_3 zu erhalten. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir eine Folge von Abbildungen $f_n\colon I^1 \to I^2$.

Man kann nun zeigen, dass der Grenzwert $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ für alle $t \in I^1$ existiert und die so konstruierte Abbildung $f\colon I^1 \to I^2$ stetig und surjektiv ist [G2, Satz 24.39]. □

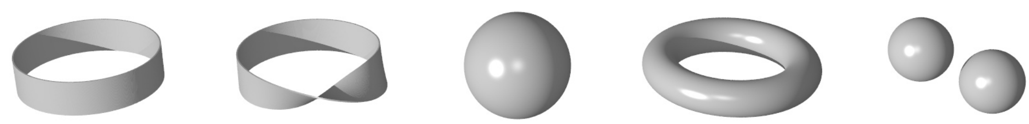
Aufgabe 2.19. Konstruiere eine stetige surjektive Abbildung ...

(a) von I^1 nach I^3;

(b) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung 2.20. Da homöomorphe Räume als topologisch gleichwertig anzusehen sind, ist es eines der wichtigsten Probleme der Topologie herauszufinden, ob zwei gegebene Räume X und Y homöomorph sind oder nicht. Sind die Räume homöomorph, so wird man dies in der Regel natürlich dadurch beweisen, dass man einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ konkret angibt — so wie wir das in Beispiel 2.15 getan haben. Wie aber zeigt man, dass zwei Räume *nicht* homöomorph sind, also dass es *keinen* Homöomorphismus zwischen ihnen geben kann? Die Idee ist hierbei, topologische Eigenschaften zu suchen (also solche, die unter Homöomorphismen unverändert bleiben), die bei den beiden Räumen verschieden sind. Was für Eigenschaften von Räumen sind also derartige topologische Eigenschaften? Wir haben in Beispiel 2.15 schon gesehen, dass die Größe und eventuelle „Ecken" des Raumes nicht dazu gehören.

Wir betrachten dazu einmal die unten abgebildeten fünf topologischen Räume (als Teilräume von $\mathbb{R}^3$ mit der Standardtopologie aufgefasst). Sie sind alle als „zweidimensionale Objekte" zu verstehen, es handelt sich also jeweils nur um die Oberfläche der betrachteten Figuren.



(a) (b) (c) (d) (e)

Diese Räume sind in der Tat alle nicht homöomorph zueinander. Auch wenn wir dies momentan noch nicht exakt beweisen können, sind die topologischen Eigenschaften, die bei diesen Räumen verschieden sind, anschaulich leicht einzusehen: Die beiden Bänder (a) und (b) haben im Gegensatz zu den anderen drei Räumen eine „Berandung", und diese Berandung besteht beim gewöhnlichen Band (a) aus zwei unzusammenhängenden Kreislinien, während sie beim Möbiusband (b) aus nur einer Kreislinie besteht (siehe auch Beispiel 5.9 (b)). Die Vereinigung (e) von zwei Kugeln ist im Gegensatz zu den anderen Räumen unzusammenhängend, und der Torus (d) hat im Gegensatz zur Kugel (c) ein „Loch“.

Wir werden im Rest dieses Skripts noch viele derartige topologische Eigenschaften kennen lernen und auch mathematisch exakt formulieren. Im nächsten Kapitel beginnen wir dabei mit dem Begriff des Zusammenhangs, den wir gerade eben bei der Unterscheidung der im Bild oben dargestellten Räume ja auch schon verwendet haben.