

Mini-Test

Probeklausur zur eigenständigen Vorbereitung

Wichtiger Hinweis. Dieser Mini-Test ist **keine offizielle Klausur** und wurde nicht von einem Lehrstuhl gestellt. Es handelt sich um ein inoffizielles Übungs- und Gedächtnisprotokoll zur eigenständigen Vorbereitung. Der Test wird nicht eingesammelt, nicht bewertet und nicht korrigiert; aus den Ergebnissen lassen sich keine offiziellen Leistungen oder Noten ableiten.

Name: **Matrikelnummer:**

Studiengang: **Datum:**

Bearbeitungshinweise

- **Bearbeitungszeit:** 45–60 Minuten. **Hilfsmittel:** keine.
- **Umfang:** 5 Aufgaben, insgesamt **50 Punkte**. **Bestanden ab 25 Punkten** (50 %).
- Begründen Sie alle Antworten vollständig. Bei Beweisaufgaben wird die saubere Argumentation bewertet; ein bloßes Endergebnis ohne Herleitung genügt nicht.
- Teilpunkte werden vergeben. Die Aufgaben dürfen in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.
- Sämtliche Aufgaben sind mit dem Stoff der Vorlesung und grundlegenden Analysis-II-Kenntnissen lösbar.
- Nutzen Sie für Nebenrechnungen das beigegefügte Konzeptpapier; gewertet wird nur die Reinschrift.

Bewertung						
Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	10	10	10	10	10	50
erreicht						

Notenschlüssel			
ab	Note	ab	Note
47,5	1,0	32,5	3,0
45,0	1,3	30,0	3,3
42,5	1,7	27,5	3,7
40,0	2,0	25,0	4,0
37,5	2,3	< 25	5,0
35,0	2,7	(n. best.)	

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(max. 10 Punkte)

Hinweis: Dies ist die einzige reine Rechenaufgabe; geben Sie jeweils die wesentlichen Schritte an.

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx.$$

Bestimmen Sie dazu zunächst eine Stammfunktion und werten Sie anschließend aus. (3 P)

- (b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2 - 1} \, dx$$

auf Konvergenz und berechnen Sie im Konvergenzfall seinen Wert. (Tipp: Partialbruchzerlegung.) (4 P)

- (c) Begründen Sie, dass man bei der Reihe der Exponentialfunktion Integration und Summation vertauschen darf, und bestätigen Sie damit die Gleichheit

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} \, dx,$$

indem Sie beide Seiten ausrechnen. Geben Sie den verwendeten Satz an. (3 P)

Aufgabe 2

(max. 10 Punkte)

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Lagrange-Restglieds, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x konvergiert. Zeigen Sie hierfür ausdrücklich, dass das Restglied $R_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. (6 P)

- (b) Zeigen Sie mit dem Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied), dass

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(4 P)

Aufgabe 3

(max. 10 Punkte)

- (a) Auf $\mathbb{R}^n$ seien die Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ und die Summennorm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ gegeben. Zeigen Sie

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

und folgern Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent sind. (5 P)

- (b) Es sei $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|.$$

Weisen Sie nach, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Begründen Sie dabei insbesondere die Definitheit sorgfältig. (5 P)

Aufgabe 4

(max. 10 Punkte)

- (a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_c = \{x \in X : f(x) < c\} \text{ offen} \quad \text{und} \quad A_c = \{x \in X : f(x) \leq c\} \text{ abgeschlossen}$$

ist. Geben Sie den verwendeten Satz an. (4 P)

- (b) Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und *koerziv*, das heißt: zu jedem $M > 0$ existiert ein $R > 0$ mit

$$f(x) > M \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| > R.$$

Beweisen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^n$ ein globales Minimum annimmt. (6 P)

Aufgabe 5

(max. 10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Begründen Sie anschließend mit dem passenden Satz aus der Vorlesung, warum f auf jedem kompakten Intervall $[a, b]$ dennoch gleichmäßig stetig ist. (5 P)

- (b) Es sei (X, d) ein *zusammenhängender* metrischer Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(X) \subseteq \mathbb{Z}$, das heißt f nimmt nur ganzzahlige Werte an. Beweisen Sie, dass f konstant ist. (5 P)

KONZEPTPAPIER | Platz für Nebenrechnungen (wird nicht gewertet)

Musterlösung

Mini-Test • Analysis II

Die Lösungen sind bewusst ausführlich dargestellt; in einer Klausur genügt eine knappere, aber vollständige Argumentation. Verweise der Form „Satz 13.xx“ beziehen sich auf die Vorlesung (Kapitel 13).

Aufgabe 1 | Lösung

(a) Zweimalige partielle Integration. Mit $u = x^2$, $v' = \cos x$ (also $u' = 2x$, $v = \sin x$):

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx.$$

Das verbleibende Integral erneut partiell mit $u = 2x$, $v' = \sin x$ ($u' = 2$, $v = -\cos x$):

$$\int 2x \sin x \, dx = -2x \cos x + \int 2 \cos x \, dx = -2x \cos x + 2 \sin x.$$

Damit ist eine Stammfunktion

$$F(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x,$$

denn $F'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = x^2 \cos x$. Auswerten:

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx = F(\pi) - F(0) = \underbrace{(\pi^2 \sin \pi)}_{=0} + 2\pi \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - \underbrace{2 \sin \pi}_{=0} - 0 = -2\pi.$$

(b) Partialbruchzerlegung: wegen $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ist

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right).$$

Für $x > 1$ ist $\frac{x-1}{x+1} > 0$, und eine Stammfunktion lautet $G(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$. Nach Definition des uneigentlichen Integrals:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{b-1}{b+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}.$$

Wegen $\frac{b-1}{b+1} \rightarrow 1$ gilt $\ln \frac{b-1}{b+1} \rightarrow 0$. Das Integral konvergiert also, und sein Wert ist

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 1} = 0 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3 \, (\approx 0,549).$$

(c) Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius ∞ ; ihre Partialsummen konvergieren daher auf jedem kompakten Intervall, insbesondere auf $[0, 1]$, *gleichmäßig* gegen e^x . Nach dem Satz über die gliedweise Integration gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen (Kapitel 11) dürfen Integral und Summe vertauscht werden. Berechnung beider Seiten:

$$\text{links: } \int_0^1 e^x \, dx = e^1 - e^0 = e - 1;$$

$$\text{rechts: } \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} = e - 1.$$

Beide Seiten ergeben $e - 1$; die Vertauschung ist damit bestätigt. $\square$

Aufgabe 2 | Lösung

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Für $f(x) = e^x$ ist $f^{(k)}(t) = e^t$ für alle k . Die Taylor-Formel um 0 mit Lagrange-Restglied liefert ein ξ zwischen 0 und x mit

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Da ξ zwischen 0 und x liegt, gilt $e^{\xi} \leq e^{|x|}$, also

$$|R_n(x)| \leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Es bleibt $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ zu zeigen. Setze $a := |x|$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2a$. Für $n+1 > N$ ist mit $a_n := \frac{a^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{N} \leq \frac{1}{2},$$

d. h. ab dem Index N halbiert sich jedes Glied gegenüber dem vorherigen mindestens. Folglich ist (a_n) ab N durch eine geometrische Nullfolge beschränkt und somit selbst eine Nullfolge. Also gilt $|R_n(x)| \rightarrow 0$ und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

(b) Wir entwickeln $\cos$ um 0 bis zur Ordnung 1 mit Lagrange-Restglied. Mit $f(x) = \cos x$ ist $f(0) = 1$, $f'(0) = -\sin 0 = 0$ und $f''(t) = -\cos t$. Es existiert ein ξ zwischen 0 und x mit

$$\cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2} x^2 = 1 - \frac{\cos \xi}{2} x^2.$$

Wegen $\cos \xi \leq 1$ und $x^2 \geq 0$ ist $-\frac{\cos \xi}{2} x^2 \geq -\frac{1}{2} x^2$, also

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(Gleichheit gilt genau im Punkt $x = 0$.) $\square$

Aufgabe 3 | Lösung

(a) Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

Erste Ungleichung. Es gibt einen Index j mit $\|x\|_{\infty} = |x_j|$. Da alle $|x_i| \geq 0$ sind, ist

$$\|x\|_{\infty} = |x_j| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Zweite Ungleichung. Jeder Summand erfüllt $|x_i| \leq \max_k |x_k| = \|x\|_\infty$, also

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \|x\|_\infty.$$

Äquivalenz. Aus $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$ folgt mit $c = 1$, $C = n$ unmittelbar die Äquivalenz im Sinne der Definition (es existieren $c, C > 0$ mit $c \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C \|x\|_a$). Dies steht im Einklang mit dem Satz, dass auf $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind; hier wurden die Konstanten explizit angegeben. $\square$

(b) Setze $g(x) = \arctan x$. Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und damit insbesondere injektiv. Wir prüfen die Metrikaxiome.

- *Nichtnegativität:* $d(x, y) = |g(x) - g(y)| \geq 0$ als Betrag.
- *Definitheit:* $d(x, y) = 0 \iff |g(x) - g(y)| = 0 \iff g(x) = g(y) \iff x = y$. Die letzte Äquivalenz benutzt die Injektivität von g ; ohne sie wäre nur die Richtung „ $\Leftarrow$ “ klar.
- *Symmetrie:* $d(x, y) = |g(x) - g(y)| = |g(y) - g(x)| = d(y, x)$.
- *Dreiecksungleichung:* mit der Dreiecksungleichung für den Betrag gilt

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |g(x) - g(z)| = |(g(x) - g(y)) + (g(y) - g(z))| \\ &\leq |g(x) - g(y)| + |g(y) - g(z)| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Somit ist d eine Metrik auf $\mathbb{R}$. (Allgemein gilt: Ist g injektiv und $\tilde{d}$ eine Metrik, so ist $d(x, y) := \tilde{d}(g(x), g(y))$ stets eine Metrik; hier ist $\tilde{d}$ der Betrag.) $\square$

Aufgabe 4 | Lösung

(a) Wir schreiben die Mengen als Urbilder unter f :

$$U_c = f^{-1}((-\infty, c)), \quad A_c = f^{-1}((-\infty, c]).$$

In $\mathbb{R}$ ist $(-\infty, c)$ offen und $(-\infty, c]$ abgeschlossen. Nach der topologischen Charakterisierung der Stetigkeit (Satz 13.33) sind Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen offen und Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Damit ist U_c offen und A_c abgeschlossen. (Alternativ ist A_c als Komplement der offenen Menge $f^{-1}((c, \infty))$ abgeschlossen.) $\square$

(b) Setze $a := f(0)$ und wende die Koerzitivität mit $M := a$ an: es gibt ein $R > 0$ mit

$$f(x) > a = f(0) \quad \text{für alle } x \text{ mit } \|x\| > R. \quad (*)$$

Die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, nach dem Satz von Heine–Borel (Satz 13.40) also kompakt; zudem ist $0 \in \overline{B}_R$, somit $\overline{B}_R \neq \emptyset$. Da f stetig ist, nimmt f auf $\overline{B}_R$ nach dem Satz vom Minimum und Maximum (Satz 13.43) sein Minimum an: es gibt $x_0 \in \overline{B}_R$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{B}_R,$$

insbesondere $f(x_0) \leq f(0) = a$. Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Ist $\|x\| \leq R$, so ist $x \in \overline{B}_R$ und damit $f(x) \geq f(x_0)$. Ist $\|x\| > R$, so liefert $(*)$ die Abschätzung $f(x) > a \geq f(x_0)$. In beiden Fällen gilt $f(x) \geq f(x_0)$, also ist x_0 ein globaler Minimierer von f auf $\mathbb{R}^n$. (Anschaulich liegt das Minimum im Inneren der Kugel, da f außerhalb größer als $f(0)$ ist.) $\square$

Aufgabe 5 | Lösung

(a) *Nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.* Zu zeigen ist die Verneinung der gleichmäßigen Stetigkeit: es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass zu jedem $\delta > 0$ Punkte x, y mit $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ existieren. Wähle $\varepsilon = 2$ und betrachte

$$x_m = m, \quad y_m = m + \frac{1}{m} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $|x_m - y_m| = \frac{1}{m} \rightarrow 0$, aber

$$|f(x_m) - f(y_m)| = \left| \left(m + \frac{1}{m}\right)^2 - m^2 \right| = 2 + \frac{1}{m^2} \geq 2.$$

Zu beliebigem $\delta > 0$ wähle m mit $\frac{1}{m} < \delta$; dann ist $|x_m - y_m| < \delta$, aber $|f(x_m) - f(y_m)| \geq 2$. Also ist f nicht gleichmäßig stetig. (Grund: die Steigung von x^2 wächst unbeschränkt.)

Gleichmäßig stetig auf $[a, b]$. Das Intervall $[a, b]$ ist beschränkt und abgeschlossen, nach Heine–Borel (Satz 13.40) also kompakt. Die stetige Funktion f ist daher nach dem Satz über die gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta (Satz 13.45) auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig. $\square$

(b) Wir dürfen $X \neq \emptyset$ annehmen (sonst ist die Aussage leer). Die Argumentation verläuft in drei Schritten:

1. Da X zusammenhängend und f stetig ist, ist das Bild $f(X)$ zusammenhängend (Satz 13.49: stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend).
2. Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle (Satz 13.48); also ist $f(X)$ ein Intervall.
3. Ein Intervall, das nur ganze Zahlen enthält, besteht aus höchstens einem Punkt: enthielte es zwei verschiedene ganze Zahlen $m < k$, so läge auch der Zwischenwert $m + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ darin – ein Widerspruch. Wegen $X \neq \emptyset$ ist $f(X) \neq \emptyset$, also $f(X) = \{c\}$ für ein $c \in \mathbb{Z}$.

Damit ist $f(x) = c$ für alle $x \in X$, also f konstant. (Anschaulich: auf einem zusammenhängenden Raum kann eine stetige Funktion keine „Sprünge“ machen; nimmt sie nur ganzzahlige Werte an, muss sie konstant sein.) $\square$