Aufgaben und Lösungen

Ausarbeitung der Übungsstunde zur Vorlesung "Analysis I"

Andreas Moor

Wintersemester 2008/2009

Übung 10

Einleitung

Fragen zur Vorlesung und Hausaufgaben werden beantwortet. Dies ist die erste Anwesenheitsübung nach Weihnachten und fällt etwas mager aus.

Ratschläge zur Klausur: Aus den ersten drei Übungszetteln die wichtigsten Tatsachen lernen und verstehen (vollständige Induktion, Supremum/Infimum, Beweisarten, Beweisideen etc.), sonst sind die weiteren Übungszettel viel wichtiger. Der wichtige Stoff fängt erst danach an – Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit. Man muss aber abschätzen können. Außerdem ist eine wichtige Beziehung die folgende: $\forall\ \varepsilon > 0 : |x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Sie wird häufig in der Mathematik verwendet. Die beste Vorbereitung geschieht, indem man mit Hilfe des *Skriptes* die Übungsaufgaben, Anwesenheitsaufgaben und Miniklausuraufgaben versteht. Die wichtigsten Sätze, die im Laufe der Lösung etlicher Aufgaben benutzt werden, sind zu lernen und zu verstehen. Die einfachen Beweise sind ebenfalls zu verstehen und müssen wiedergegeben werden können. Wenn man das *Skript* durcharbeitet, sollte man sich bei den Beweisen fragen: „Kann ich das erklären/wiedergeben?“. Die wichtigsten Beziehengen, die man häufig benutzt (geometrische Reihe, harmonische Reihe, Standardfolgen, Zwischenwertsatz, und weitere, die hier nicht aufgeführt sind), müssen verstanden und auswendig gelernt worden sein („Kann ich zeigen, daß geometrische Reihe konvergiert/harmonische Reihe divergiert?“). Die Definitionen (allmählig muss klar sein, welche) sind zu lernen und, im optimalen Fall, zu verstehen.

That’s all.

Aufgaben

Aufgabe 1

In vielen Zusammenhängen sind die Potenzreihen interessant.

i) *a)* *Was ist eine Potenzreihe?*

b) *Was ist ihr Konvergenzradius?*

c) *Was ist der Zusammenhang zum Wurzelkriterium?*

ii) *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen*

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3 + n}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{3^n(2n+1)} z^n$$

Lösung

Alle Definitionen müssten bereits auswendig gelernt sein, wir gehen auf die Antworten hier kurz ein.

i) a) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \in \mathbb{C}$, so heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)1k$$

die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0.

b) Es sei $\sqrt[k]{|a_k|}$ beschränkt und $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = r$, $r \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Zahl $R := 1/r$ Konvergenzradius der obigen Reihe. Ist $r = 0$, so setzen wir $R := \infty$.

c) Der Zusammenhang mit dem Wurzelkriterium ist direkt, denn die Konvergenz der Potenzreihe für $|z - z_0| < 1/r$ und die Divergenz für $|z - z_0| > r$ folgt direkt aus dem Wurzelkriterium für Reihen (Beweis von Satz 2.7.2). Es ist wichtig, sich die Beweisidee dieses Satzes klarzumachen und auch viele andere einfache Beweise skizzieren zu können.

ii) Die Konvergenzradien werden mit der Formel von Cauchy-Hadamard bestimmt:

a) Mit $a_n = \frac{1}{n^3+n}$ folgt:

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3 + n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3 + n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1,$$

wegen der Konvergenz der Standardfolgen mit bekannten Grenzwerten (s. Vorlesung oder Übung). Daraus folgt dann: $R = 1$.

b) Mit $a_n = \frac{\imath^n}{3^n(2n+1)}$ folgt:

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{\imath^n}{3^n(2n+1)}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n(2n+1)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3},$$

was wieder, wie oben, auf den bekannten Grenzwerten basiert. Dann folgt: $R = 3$.

Aufgabe 2

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R_1 und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R_2. Begründen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produktes:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

für alle $z \in B(0,R)$ mit $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Lösung

Mit der Formel für das Cauchy-Produkt (siehe Anwesenheitsübung 9, S. 3) gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, die in dem kleineren Gebiet liegen, also $z \in B(0,R)$, $R = \min\{R_1, R_2\}$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j\right) &= \sum_{n=k_0+j_0}^{\infty} \sum_{k+j=n} (a_k z^k)(b_j z^j) \\
&= \sum_{n=k_0+j_0}^{\infty} \sum_{k=k_0}^{n-j_0} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^{n-k} z^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n
\end{aligned}$$

$(*)$: hier gilt $k_0 = j_0 = 0$.