10. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 46: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen:

$$\text{(a)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k\right), \qquad \text{(b)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}\right), \qquad \text{(c)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k} x^k\right).$$

Lösung 46:

(a) Es ist

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k+2}{2^k} x^k\right|} = \frac{|x|}{2} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+2} = \frac{|x|}{2}.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist der Konvergenzkreis $\{x \in \mathbb{C} : |x| < 2\}$.

(b) Hier gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(2+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}\right|} = |2+x|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{k}} = \frac{|2+x|^2}{2}.$$

Daher konvergiert die Reihe absolut für $|2+x|^2 < 2$ und divergiert für $|2+x|^2 > 2$. Das entspricht dem Konvergenzkreis $\{x \in \mathbb{C} : \ |x+2| < \sqrt{2}\}$ und somit dem Konvergenzradius $r = \sqrt{2}$.

(c) Da

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{3^{k+2}}{2^k} x^k\right|} = \frac{3}{2} |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{9} = \frac{3}{2} |x|$$

ist, konvergiert die Reihe absolut für $\frac{3}{2}|x| < 1$ und divergiert für $\frac{3}{2}|x| > 1$. Daher ist der Konvergenzradius $r = 2/3$.

Aufgabe 47: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right]^n (x+1)^n\right).$$

Lösung 47: Es gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \left|\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right|^n |x+1|^n} &= \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \left|\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right| |x+1| \\
&= \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} |x+1| \\
&= \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} |x+1| \\
&\to \frac{1}{2} |x+1|, \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Potenzreihe nach dem Wurzelkriterium für $|x+1| < 2$, d.h. $x \in (-3, 1)$. Sie divergiert für $|x+1| > 2$. Wenn $|x+1| = 2$ ist, zeigt die Abschätzung

$$\frac{2^n}{n^2} \left|\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^n\right| = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2(n-1)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\right)^n \leq \frac{1}{n^2},$$

dass durch $\sum \frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante gegeben ist. Also konvergiert die Potenzreihe für $x = 1$ und $x = -3$.

Aufgabe 48: Gegeben ist die Folge

$$a_1 = \frac{1}{e}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{e + a_n e^{n+1}} \text{ für } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie $a_n > 0$, und dass die Folge monoton ist.

(b) Bestimmen Sie eine geschlossene Darstellung für a_n.

(c) Es gilt

$$\ln x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k, \quad \text{für} \quad |x-1| < 1\,.$$

Bestimmen Sie damit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lösung 48:

(a) Wir zeigen $a_n > 0$ mit vollständiger Induktion:

$n = 1$: $a_1 = \frac{1}{e} > 0$

$n \to n+1$: Gegeben ist $a_n > 0$ und zu zeigen ist $a_{n+1} > 0$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{e + a_n e^{n+1}}$$

Da hier Zähler und Nenner jeweils positiv sind, gilt damit auch $a_{n+1} > 0$.

Für die Monotonie betrachten wir den Quotienten:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n}{e+a_n e^{n+1}}}{a_n} = \frac{1}{\underbrace{e}_{>2} + \underbrace{a_n e^{n+1}}_{>0}} < \frac{1}{2}$$

Damit ist die Folge streng monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt, also ist klar, dass sie nach dem Monotoniekriterium konvergiert.

(b) Wir müssen uns zunächst einige Folgenwerte ausrechnen, um eine Vermutung anstellen zu können:

$$a_1 = \frac{1}{e}, \; a_2 = \frac{e^{-1}}{e + e^{-1}e^2} = \frac{e^{-2}}{2}, \; a_3 = \ldots = \frac{e^{-3}}{3}, \; \ldots$$

Wir können also vermuten, dass $a_n = \frac{1}{n}e^{-n}$ lautet. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion:

$n = 1$: $a_1 = \frac{1}{e} = \frac{1}{1}e^{-1}$

$n \to n+1$: Gegeben ist $a_n = \frac{1}{n}e^{-n}$ und zu zeigen ist $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{e + a_n e^{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}e^{-n}}{e + \frac{1}{n}e^{-n}e^{n+1}} = \frac{1}{n}e^{-(n+1)}\frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)}$$

Damit ist gezeigt, dass $a_n = \frac{1}{n}e^{-n}$ ist.

(c) Wir vergleichen

$$\ln x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}e^{-k}$$

und sehen, dass wir

$$(-1)^k(x-1)^k = (1-x)^k \stackrel{!}{=} e^{-k} = \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

erreichen müssen. Dies gilt für $1 - x = \frac{1}{e}$, also $x = 1 - \frac{1}{e}$. Da nun $|x-1| = |1 - \frac{1}{e} - 1| = \frac{1}{e} < 1$ gilt, ist für dieses x die angegebene Gleichung gültig und wir erhalten, dass

$$\ln(1 - \frac{1}{e}) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\ln(1 - \frac{1}{e})\,.$$

Aufgabe 49: Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\cosh z - \frac{1}{2}\,(1-8i)\,e^{-z} = 2+2i.$$

Lösung 49: Mit der Formel $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ erhält man

$$\frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) - \frac{1}{2}\,(1-8i)\,e^{-z} = 2+2i, \qquad \text{also} \quad e^z + 8i\,e^{-z} = 4+4i.$$

Nach der Substitution $w = e^z$ und anschließender Multiplikation mit w ergibt sich die quadratische Gleichung

$$w^2 - (4+4i)\,w + 8i = 0.$$

Diese Gleichung löst man durch quadratisches Ergänzen:

$$0 = (w-(2+2i))^2 - (2+2i)^2 + 8i = (w-(2+2i))^2 - 4 - 8i + 4 + 8i = (w-(2+2i))^2.$$

Also ist $w = 2+2i$, insbesondere also $|w| = 2\sqrt{2}$ und $\arg(w) = \pi/4$. Mit dem komplexen Logarithmus ergibt sich also

$$z = \ln(2\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 50: Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung

$$2\,\sin z\,\cos z = \operatorname{Im} z.$$

Hinweis: Die Gleichung

$$(-1)^k\,\cosh x = x/2$$

hat für kein $k \in \mathbb{Z}$ eine reelle Lösung.

Lösung 50: Es gilt mit $z = x+iy$

$$\begin{aligned}
2\sin z\,\cos z = \sin(2z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{2iz} - e^{-2iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right) - e^{2y}\left(\cos(2x) - i\sin(2x)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\cos(2x)\left(e^{-2y} - e^{2y}\right) + i\sin(2x)\left(e^{-2y} + e^{2y}\right)\right)\\
&= \sin(2x)\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}\right) + i\cos(2x)\left(\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}\right)\\
&= \sin(2x)\cosh(2y) + i\cos(2x)\sinh(2y)
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Imaginärteile von diesem Term und $\operatorname{Im} z = y + 0i$ liefert also

$$\cos(2x)\,\sinh(2y) = 0.$$

Also ist entweder $\cos(2x) = 0$ oder $\sinh(2y) = 0$. Die Möglichkeit $\cos(2x) = 0$ liefert $x = (2k+1)\,\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Da dann $\sin(2x) = (-1)^k$ ist, ergibt sich durch Vergleich der Realteile

$$(-1)^k\,\cosh(2y) = y,$$

und diese Gleichung hat nach dem Hinweis (und Substitution $\tilde{x} = 2y$) keine Lösung. Die Möglichkeit $\sinh(2y) = 0$ liefert $y = 0$ und damit durch Vergleich der Realteile

$$\sin(2x) = 0.$$

Also ist $x = k\,\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Lösungen der Gleichung haben also die Form $z = k\,\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.