Konvergenzkriterien für Reihen

Um Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz zu untersuchen, gibt es im Prinzip die folgenden Kriterien (weitere finden sich zum Beispiel in „Repetitorium der Höheren Mathematik“)

- Trivialkriterium
- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium
- Leibnizkriterium
- Majoranten- und Minorantenkriterium
- Integralvergleichskriterium

<u>Trivialkriterium:</u>
Wenn eine Reihe $\sum a_k$ konvergiert, dann bildet die Folge a_k eine Nullfolge.

Mit diesem Kriterium können wir nur die Divergenz, aber im Allgemeinen nicht die Konvergenz einer Reihe nachweisen. Denn das Kriterium ist nur notwendig, nicht hinreichend. Die Voraussetzung, dass die Reihe konvergent ist, ist wichtig. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Dazu betrachte man das Gegenbeispiel der harmonischen Reihe. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist bekanntlich divergent, obwohl die Folge $\frac{1}{k}$ für $k \to \infty$ eine Nullfolge ist.

Beispiel:
Warum kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^n$ nicht konvergieren?
Das ist sehr leicht zu sagen, denn das Trivialkriterium ist verletzt, denn es gilt bekanntlich $\lim_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Folglich $a_n := (\frac{n-1}{n})^n$ bildet keine Nullfolge, wie es bei Konvergenz einer Folge aber sein müsste.

<u>Quotientenkriterium:</u>
Gegeben sei eine Reihe $\sum a_n$.

Existiert ein $0 < \Theta < 1$ mit $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \Theta$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.

Mit anderen Worten:

Wenn $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, dann konvergiert die Reihe.

Wenn $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, dann divergiert die Reihe.

Wenn $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$, dann liefert das Quotientenkriterium keine Entscheidung über Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe.

Um mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe nachzuweisen, müssen wir also nur den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen. Obwohl wir jetzt im Folgenden nicht den Limes superior verwenden werden. Dazu ein

Beispiel:

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$?

Hier wenden wir das Quotientenkriterium an:

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = |\frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}}| = |\frac{(k+1)^2 \bullet 2^k}{2^{k+1} \bullet k^2}| = |\frac{1}{2}(\frac{k+1}{k})^2| = |\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})^2| \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt also die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

<u>Wurzelkriterium:</u>

Die Reihe $\sum a_k$ konvergiert absolut, wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$.

Für $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ folgt die Divergenz der Reihe.

Beispiel:

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (2+\frac{1}{k})^k$?

Nein, denn nach dem Wurzelkriterium folgt gerade:

Es gilt $\sqrt[k]{(2+\frac{1}{k})^k} = 2+\frac{1}{k} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 2 > 1$. Also divergiert die Reihe.

<u>Leibnizkriterium:</u>

Ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum (-1)^k a_k$.

Beispiel:

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ folgt direkt aus dem Leibnizkriterium, denn $a_k = \frac{1}{k}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. (Genauer müsste man eventuell dann noch zeigen, dass die Folge $a_k = \frac{1}{k}$ wirklich monoton fallend ist und gegen Null konvergiert.)

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert aber nicht absolut, denn wir erhalten durch $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ die divergente harmonische Reihe.

Majoranten- und Minorantenkriterium:

Majorantenkriterium:
Mit diesem Kriterium kann man die Konvergenz einer Reihe nachweisen:
Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ ab einem k_0 und ist die Majorante $\sum b_k$ konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$.

Majorantenkriterium:
Mit diesem Kriterium kann man die Divergenz einer Reihe nachweisen:
Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ ab einem k_0 und ist die Minorante $\sum a_k$ divergent, so divergiert die Reihe $\sum b_k$.

Fassen wir dies nochmal in eigenen Worten zusammen (auch wenn es etwas umgangssprachlich ist).
Beim Majorantenkriterium schätzt man die Folge a_k der Reihe $\sum a_k$ nach oben z.B. durch b_k ab. Konvergiert dann die entsprechende Reihe $\sum b_k$, so konvergiert auch die zu untersuchende Reihe $\sum a_k$.

Beim Minorantenkriterium schätzt man die Folge b_k der Reihe nach unten z.B. durch a_k ab. Divergiert dann die Reihe $\sum a_k$, so divergiert auch die zu untersuchende Reihe $\sum b_k$.

Beispiele:
Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$?
Nein, tut sie nicht. Aber wie begründen wir das?
Es gilt $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2}} = \frac{1}{k+1}$. Und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ ist bekanntlich divergent (harmonische Reihe). Also haben wir eine divergente Minorante gefunden und die Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ gezeigt.

Wie sieht es mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \bullet k}{k^3+1}$ aus?

Auch hier haben wir zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Anwenden des Majoranten- und Minorantenkriteriums

Es gilt folgende Abschätzung $\left|\frac{(-1)^k \bullet k}{k^3+1}\right| = \frac{k}{k^3+1} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$.

Wir wissen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt damit die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \bullet k}{k^3+1}$.

2. Möglichkeit: Anwenden des Leibniz-Kriteriums
Eine andere Möglichkeit die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \bullet k}{k^3+1}$ zu zeigen, ist das Leibniz-Kriterium anzuwenden. Man zeigt leicht, dass $a_k = \frac{k}{k^3+1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Die Ausführungen überlassen wir dem Leser. :-P

<u>Integralvergleichskriterium:</u>

Sei $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ existiert.

Beispiel:
Wir behaupten, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ für $k>1$ konvergiert. Klar, für $k=1$ ergibt sich die divergente harmonische Reihe.
Wir haben nun zwei Möglichkeiten die Konvergenz zu zeigen. Wir führen beide an.

Da das Integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ nicht existiert (in der Vorlesung gezeigt), divergiert die harmonische Reihe. Weiterhin haben wir gezeigt, dass die uneigentlichen Integrale $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^k}dx$ existieren. Mit dem Integralvergleichskriterium folgt die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ für $k>1$.

Anmerkung:
Man kann dies auch mit dem Majoranten- und Minorantenkriterium zeigen:
Es gilt $\frac{1}{n^k}<\frac{1}{n^2}<\frac{2}{n(n+1)}$ *. Nun wissen wir aber nach einem Übungszettel, dessen Nummer mir aber gerade entfallen ist, dass die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ *konvergiert. Wir haben also eine konvergenzte Majorante gefunden und gezeigt, dass die Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ *für* $k>1$ *konvergieren.*