

Aufgabe 1. Zeige nur mit der Definition von Konvergenz, dass die Folge

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1}$$

gegen 1 konvergiert. (Es dürfen keine Rechenregeln für $\lim_{n \rightarrow \infty}$ verwendet werden.)

Lösung. Wir zeigen die Konvergenz mit der ε -Definition.

Ziel: Wir müssen beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - 1| < \varepsilon.$$

Schritt 1: Abstand zu 1 ausrechnen. Zunächst vereinfachen wir den Ausdruck $|a_n - 1|$:

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= \left| \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1} - 1 \right| = \left| \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1} - \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{n} - (2\sqrt{n} - 1)}{2\sqrt{n} - 1} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{n} - 1} \right|. \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ gilt $2\sqrt{n} - 1 > 0$ (denn $\sqrt{n} \geq 1$). Daher ist der Bruch positiv und der Betrag kann weggelassen werden:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{2\sqrt{n} - 1} \quad (n \geq 1).$$

Schritt 2: $|a_n - 1| < \varepsilon$ umformen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fest. Wir möchten

$$\frac{1}{2\sqrt{n} - 1} < \varepsilon$$

erzwingen. Da $2\sqrt{n} - 1 > 0$, dürfen wir gefahrlos umformen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{n} - 1} < \varepsilon &\iff 1 < \varepsilon(2\sqrt{n} - 1) \\ &\iff 1 < 2\varepsilon\sqrt{n} - \varepsilon \\ &\iff 1 + \varepsilon < 2\varepsilon\sqrt{n} \\ &\iff \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} < \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Man kann den Bruch auch schreiben als

$$\frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right).$$

Also genügt es, dass

$$\sqrt{n} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right).$$

Schritt 3: Wahl von N . Da beide Seiten nichtnegativ sind, dürfen wir quadrieren:

$$n > \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)^2.$$

Wir wählen daher

$$N := \left\lceil \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)^2 \right\rceil.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$ insbesondere

$$n \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)^2,$$

also $\sqrt{n} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)$. Damit erfüllen alle $n \geq N$ (durch Rückwärtslesen der obigen Äquivalenzen) die gewünschte Abschätzung:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{2\sqrt{n} - 1} < \varepsilon.$$

Schluss: Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt nach Definition:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

□

Aufgabe 2. Es sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die zusätzlich der Gleichung

$$f(0) = f(2)$$

genügt. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0, 1]$ mit

$$f(\xi) = f(\xi + 1)$$

existiert.

Lösung. Wir wollen zeigen, dass es auf dem Intervall $[0, 1]$ mindestens eine Stelle ξ gibt, an der die Funktionswerte im Abstand 1 übereinstimmen, also $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

Idee: Man betrachtet die Differenz der beiden Funktionswerte $f(x + 1)$ und $f(x)$. Wenn diese Differenz irgendwo 0 ist, sind die Werte gleich. Also definieren wir eine Hilfsfunktion, deren Nullstelle genau das Gesuchte liefert.

Schritt 1: Spezialfall. Falls bereits $f(0) = f(1)$ gilt, können wir sofort $\xi = 0$ wählen, denn dann ist

$$f(\xi) = f(0) = f(1) = f(\xi + 1).$$

Damit sind wir in diesem Fall fertig.

Schritt 2: Reduktion auf den Fall $f(0) \neq f(1)$. Im Folgenden dürfen wir also annehmen:

$$f(0) \neq f(1).$$

Diese Annahme sorgt gleich dafür, dass eine bestimmte Zahl ungleich 0 ist und wir ein Vorzeichenargument verwenden können.

Schritt 3: Definition einer Hilfsfunktion. Wir definieren

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x + 1) - f(x).$$

Beachte: Für $x \in [0, 1]$ liegt $x + 1 \in [1, 2]$, also sind sowohl $f(x)$ als auch $f(x + 1)$ wohldefiniert.

Schritt 4: Stetigkeit von g . Da f stetig ist, sind auch die Funktionen $x \mapsto f(x + 1)$ und $x \mapsto f(x)$ stetig (Verschiebung erhält Stetigkeit). Die Differenz zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig. Also ist

$$g \text{ stetig auf } [0, 1].$$

Schritt 5: Werte von g an den Randpunkten. Wir berechnen nun $g(0)$ und $g(1)$:

$$g(0) = f(1) - f(0).$$

Wegen der Annahme $f(0) \neq f(1)$ gilt insbesondere $g(0) \neq 0$.

Außerdem:

$$g(1) = f(2) - f(1).$$

Nun benutzen wir die zusätzliche Bedingung $f(2) = f(0)$. Damit folgt:

$$g(1) = f(0) - f(1) = -(f(1) - f(0)) = -g(0).$$

Schritt 6: Vorzeichenwechsel. Aus $g(1) = -g(0)$ und $g(0) \neq 0$ folgt unmittelbar, dass $g(0)$ und $g(1)$ verschiedene Vorzeichen haben:

$$g(0) > 0 \Rightarrow g(1) < 0, \quad \text{oder} \quad g(0) < 0 \Rightarrow g(1) > 0.$$

Insbesondere gilt damit

$$g(0) \cdot g(1) < 0.$$

Das bedeutet: Die stetige Funktion g nimmt am linken Rand einen Wert mit anderem Vorzeichen an als am rechten Rand.

Schritt 7: Anwendung des Zwischenwertsatzes. Da g stetig auf $[0, 1]$ ist und $g(0)$ und $g(1)$ verschiedene Vorzeichen haben, liefert der Zwischenwertsatz (auch Nullstellensatz genannt):

$$\exists \xi \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad g(\xi) = 0.$$

Schritt 8: Rückschluss auf f . Aus $g(\xi) = 0$ folgt per Definition von g :

$$0 = g(\xi) = f(\xi + 1) - f(\xi).$$

Also

$$f(\xi + 1) = f(\xi).$$

Damit haben wir genau die gewünschte Aussage gezeigt. (Im Spezialfall oben lag sogar $\xi = 0$ in $[0, 1]$; ansonsten erhalten wir $\xi \in (0, 1)$.)

□

Aufgabe 3. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} x^n.$$

Bestimmen Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} : \text{die Reihe konvergiert}\} \quad \text{und} \quad M_2 := \{x \in \mathbb{R} : \text{die Reihe konvergiert absolut}\}.$$

Lösung. Wir untersuchen zunächst die *absolute Konvergenz* und danach die *Randfälle*. Dazu schreiben wir die Reihe als Potenzreihe mit Koeffizienten

$$a_n(x) := \frac{(-1)^n}{n 2^n} x^n.$$

1) Absolute Konvergenz mittels Wurzelkriterium. Für absolute Konvergenz betrachten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} |x|^n.$$

Wir wenden das Wurzelkriterium auf die Folgenglieder $|a_n(x)|$ an:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n 2^n}} = \frac{|x|}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

Nun gilt $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, also auch $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$. Daher erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{|x|}{2}.$$

Nach dem Wurzelkriterium folgt:

- Falls $\frac{|x|}{2} < 1$, also $|x| < 2$, dann konvergiert die Reihe *absolut*.
- Falls $\frac{|x|}{2} > 1$, also $|x| > 2$, dann divergiert die Reihe (dann sogar die Absolutreihe).
- Der Fall $\frac{|x|}{2} = 1$, also $|x| = 2$, bleibt offen und muss separat untersucht werden.

Damit wissen wir bereits:

$$|x| < 2 \Rightarrow x \in M_2, \quad |x| > 2 \Rightarrow x \notin M_1.$$

Es bleiben also nur die Randpunkte $x = 2$ und $x = -2$.

2) Randfall $x = 2$. Setzen wir $x = 2$ in die Reihe ein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Das ist die *alternierende harmonische Reihe*. Sie konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium: Die Folgenglieder $b_n := \frac{1}{n}$ sind positiv, monoton fallend und $b_n \rightarrow 0$. Also konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (\text{bedingt}).$$

Absolute Konvergenz liegt hier jedoch nicht vor, denn die Absolutreihe wäre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

und diese harmonische Reihe divergiert. Also gilt:

$$x = 2 \in M_1 \quad \text{aber} \quad x = 2 \notin M_2.$$

3) Randfall $x = -2$. Setzen wir nun $x = -2$ ein:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} (-2)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} (-1)^n 2^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Hier verschwindet also die Alternierung komplett, und es bleibt wieder die harmonische Reihe, die divergiert. Damit gilt:

$$x = -2 \notin M_1 \quad \text{und damit erst recht} \quad x = -2 \notin M_2.$$

4) Zusammenfassung der Mengen M_1 und M_2 .

- Für $|x| < 2$ konvergiert die Reihe absolut $\Rightarrow x \in M_2 \subseteq M_1$.
- Für $|x| > 2$ divergiert die Reihe $\Rightarrow x \notin M_1$.
- Für $x = 2$ konvergiert die Reihe, aber nicht absolut $\Rightarrow x \in M_1 \setminus M_2$.
- Für $x = -2$ divergiert die Reihe $\Rightarrow x \notin M_1$.

Somit erhalten wir:

$$M_1 = (-2, 2] \quad \text{und} \quad M_2 = (-2, 2).$$

□

Aufgabe 4. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. In welchen Punkten von $\mathbb{R}$ ist f

1. stetig?

2. differenzierbar?

Lösung. Wir benutzen, dass $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ jeweils dicht liegen. Daher kann man Grenzwertfragen prüfen, indem man Folgen rationaler bzw. irrationaler Zahlen gegen denselben Punkt laufen lässt.

(a) Stetigkeit.

Behauptung: f ist genau in $x = 0$ stetig.

Stetigkeit in 0. Zunächst ist

$$f(0) = 0$$

(denn $0 \in \mathbb{Q}$ und $0 \sin 0 = 0$). Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x)| = \begin{cases} |x \sin x|, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \leq |x \sin x| \leq |x|,$$

weil $|\sin x| \leq 1$ für alle x . Also folgt für $x \rightarrow 0$:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| \rightarrow 0.$$

Damit ist f in 0 stetig.

Unstetigkeit in jedem $a \neq 0$. Sei nun $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1: $\sin a \neq 0$. Dann gilt $a \sin a \neq 0$. Wähle eine Folge $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ mit $q_n \rightarrow a$ und eine Folge $(r_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $r_n \rightarrow a$ (existiert wegen Dichtheit). Dann ist

$$f(q_n) = q_n \sin(q_n) \rightarrow a \sin a \neq 0, \quad f(r_n) = 0 \rightarrow 0.$$

Also besitzt $f(x)$ für $x \rightarrow a$ entlang verschiedener Folgen verschiedene Grenzwerte; somit existiert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nicht, also ist f in a unstetig.

Fall 2: $\sin a = 0$. Dann ist $a = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und wegen $a \neq 0$ sogar $k \neq 0$. Dann gilt $f(a) = 0$ (egal ob a rational oder irrational ist: im rationalen Fall $a \sin a = 0$, im irrationalen Fall per Definition). Wir zeigen, dass trotzdem keine Stetigkeit vorliegt.

Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $|x - a| < \delta$ bereits $|x| \geq \frac{|a|}{2}$ impliziert (z.B. $\delta = \frac{|a|}{2}$). Außerdem existiert wegen der Stetigkeit von $\sin$ und weil $\sin'(a) = \cos(a) = \pm 1 \neq 0$, ein $\delta_1 > 0$ und eine Konstante $c > 0$ (z.B. $c = \frac{1}{2}$), so dass für alle $|x - a| < \delta_1$ gilt:

$$|\sin x| \geq c|x - a|.$$

(Begründung: $\sin$ hat bei $a = k\pi$ eine einfache Nullstelle, daher wächst $|\sin x|$ in erster Ordnung wie $|x - a|$.)

Setze $\delta_0 := \min\{\delta, \delta_1\}$. Dann folgt für $|x - a| < \delta_0$ und $x \in \mathbb{Q}$:

$$|f(x)| = |x \sin x| \geq \frac{|a|}{2} |\sin x| \geq \frac{|a|}{2} c |x - a|.$$

Nun wählen wir eine rationale Folge $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ mit $q_n \rightarrow a$ aber $q_n \neq a$. Dann gilt

$$|f(q_n)| \geq \frac{|a|c}{2} |q_n - a| > 0 \quad \text{für alle } n,$$

und zwar insbesondere: Für jedes n ist $f(q_n) \neq 0$, obwohl $f(a) = 0$. Gleichzeitig existiert natürlich auch eine irrationale Folge $(r_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $r_n \rightarrow a$ und

$$f(r_n) = 0 \quad \text{für alle } n.$$

Damit kann $f(x)$ in jeder Umgebung von a sowohl Werte 0 (auf Irrationalen) als auch von 0 verschiedene Werte (auf Rationalen) annehmen; insbesondere kann $f(x)$ nicht gegen $f(a) = 0$ konvergieren, wenn $x \rightarrow a$. Also ist f auch in diesem Fall in a unstetig.

Damit ist gezeigt: f ist genau in 0 stetig.

(b) Differenzierbarkeit.

Behauptung: f ist genau in $x = 0$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$.

Differenzierbarkeit in 0. Wir betrachten den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h}.$$

Für $h \in \mathbb{Q}$ ist $f(h) = h \sin h$, also

$$\frac{f(h)}{h} = \sin h.$$

Für $h \notin \mathbb{Q}$ ist $f(h) = 0$, also

$$\frac{f(h)}{h} = 0.$$

In jedem Fall gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{f(h)}{h} \right| \leq |\sin h| \leq |h| \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

oder einfacher: $|\sin h| \rightarrow 0$ und die irrationale Teilfolge ist ohnehin 0. Somit folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Also ist f in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$.

Nicht-Differenzierbarkeit für $a \neq 0$. Ist $a \neq 0$, so ist f nach (a) in a nicht stetig. Da Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, kann f in a nicht differenzierbar sein.

Ergebnis:

f ist stetig genau in 0, und differenzierbar genau in 0 mit $f'(0) = 0$.

□

Aufgabe 5. Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Einschränkung

$$g := f|_{]-\infty, a]} \quad (\text{bzw. } h := f|_{[a, \infty[})$$

stetig in a ist. Zeigen Sie, dass f genau dann in a stetig ist, wenn f in a linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

Lösung. Wir beweisen die Äquivalenz in beiden Richtungen.

Vorbereitung: Stetigkeit in a bedeutet per ε - δ -Definition:

$$f \text{ ist stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Linksseitige Stetigkeit in a bedeutet entsprechend:

$$g \text{ ist stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x \leq a : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

denn auf $] - \infty, a]$ ist $g(x) = f(x)$. Analog rechtsseitig:

$$h \text{ ist stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \geq a : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

($\Rightarrow$) Sei f stetig in a . Wir zeigen, dass f dann links- und rechtsseitig stetig in a ist.

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Stetigkeit von f in a folgt: Es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt diese Implikation auch für alle $x \leq a$ (denn das ist nur eine Einschränkung der Menge der zulässigen x). Also:

$$\forall x \leq a : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Das ist genau die Stetigkeit von $g = f|_{]-\infty, a]}$ in a . Damit ist f linksseitig stetig in a .

Genauso folgt für alle $x \geq a$:

$$\forall x \geq a : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

also ist $h = f|_{[a, \infty[}$ stetig in a . Damit ist f auch rechtsseitig stetig in a .

Somit gilt: Aus der (zweiseitigen) Stetigkeit von f in a folgt linksseitige und rechtsseitige Stetigkeit in a .

($\Leftarrow$) Sei nun umgekehrt f linksseitig und rechtsseitig stetig in a . Wir zeigen, dass dann f (zweiseitig) stetig in a ist.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f linksseitig stetig ist, ist $g = f|_{]-\infty, a]}$ stetig in a . Also existiert ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\forall x \leq a : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Da f rechtsseitig stetig ist, ist $h = f|_{[a, \infty[}$ stetig in a . Also existiert ein $\delta_2 > 0$ mit

$$\forall x \geq a : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Nun wählen wir eine einheitliche Schranke

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Diese Wahl ist typisch: Sie garantiert, dass $|x - a| < \delta$ automatisch sowohl $|x - a| < \delta_1$ als auch $|x - a| < \delta_2$ impliziert.

Sei nun ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gegeben. Dann gilt entweder $x \leq a$ oder $x \geq a$ (beides zusammen ist nur bei $x = a$ möglich, was unproblematisch ist).

- Fall $x \leq a$: Aus $|x - a| < \delta \leq \delta_1$ folgt mit der linksseitigen Stetigkeit:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- Fall $x \geq a$: Aus $|x - a| < \delta \leq \delta_2$ folgt mit der rechtsseitigen Stetigkeit:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

In beiden Fällen gilt also $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Damit haben wir gezeigt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

also ist f stetig in a .

Schlussfolgerung: Wir haben beide Richtungen bewiesen. Daher gilt:

$$f \text{ ist stetig in } a \iff f \text{ ist linksseitig stetig in } a \text{ und rechtsseitig stetig in } a.$$

□

Aufgabe 6. Beweisen Sie, dass die durch

$$C_n := -\log(n+1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

definierte Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Hinweis: Es ist sinnvoll, die Abschätzung

$$0 \leq \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n \leq \frac{1}{2n^2} \quad (n \geq 1)$$

zu verwenden.

Lösung. Wir zeigen die Konvergenz, indem wir C_n als Partialsummen einer konvergenten Reihe darstellen.

Schritt 1: Umformung des Logarithmus-Terms zu einer Summe. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (mit $\log 1 = 0$):

$$-\log(n+1) = -\log(n+1) + \log 1 = -(\log(n+1) - \log 1).$$

Da $\log(n+1) - \log 1 = \log(n+1) = \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k)$ (Teleskopsumme), folgt

$$-\log(n+1) = \sum_{k=1}^n (-\log(k+1) + \log k).$$

Setzt man dies in die Definition von C_n ein, erhält man:

$$\begin{aligned} C_n &= -\log(n+1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-\log(k+1) + \log k) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k \right). \end{aligned}$$

Wir haben also die Darstellung

$$C_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k.$$

Damit ist (C_n) genau die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Folglich konvergiert (C_n) genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Schritt 2: Abschätzung der Summanden a_k . Aus der gegebenen Ungleichung folgt für jedes $k \geq 1$:

$$0 \leq a_k = \frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k \leq \frac{1}{2k^2}.$$

Insbesondere sind alle Summanden a_k nichtnegativ. Außerdem werden sie von der Folge $\frac{1}{2k^2}$ majorisiert.

Schritt 3: Majorantenkriterium. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert (p-Reihe mit $p = 2$; alternativ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) < \infty$). Da $0 \leq a_k \leq \frac{1}{2k^2}$ für alle k gilt, folgt mit dem Majorantenkriterium:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergiert (sogar absolut, da } a_k \geq 0 \text{)}.$$

Schritt 4: Schluss für die Folge (C_n) . Da $C_n = \sum_{k=1}^n a_k$ die n -te Partialsumme der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist, folgt:

$$(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ konvergiert in } \mathbb{R}.$$

Bemerkung (optional): Tatsächlich konvergiert C_n gegen die Euler–Mascheroni-Konstante γ , aber für die Aufgabe genügt die bloße Existenz eines Grenzwerts. $\square$

Aufgabe 7 (Aufgabe 5 (10 Punkte)). Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Alle aufgestellten Behauptungen sind zu beweisen.

Hinweis: Sie können die Definition von Stetigkeit, aber auch eine äquivalente Charakterisierung aus der Vorlesung bzw. den Übungsblättern verwenden.

Lösung. Wir bestimmen a so, dass f überall stetig ist.

1) Stetigkeit für $x_0 \neq 0$. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist in einer Umgebung von x_0 stets $x \neq 0$, und wir haben dort die Darstellung

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}.$$

Die Abbildungen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 4+x^2$, $x \mapsto \sqrt{4+x^2}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$. Außerdem ist der Nenner x^2 in $x_0 \neq 0$ ungleich 0, also ist auch die Quotientenbildung in einer Umgebung von x_0 zulässig und stetig. Damit ist f als Verkettung bzw. Kombination stetiger Funktionen in jedem $x_0 \neq 0$ stetig.

2) Stetigkeit in $x_0 = 0$. Es bleibt also nur zu untersuchen, für welches a die Funktion in 0 stetig ist. Per Definition (bzw. per Folgenkriterium) gilt:

$$f \text{ ist stetig in } 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a.$$

Wir berechnen daher den Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ (mit $x \neq 0$).

3) Grenzwertberechnung durch Rationalisieren. Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}.$$

Wir rationalisieren den Zähler mittels der binomischen Formel $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2}+2}{\sqrt{4+x^2}+2} \\ &= \frac{(4+x^2)-4}{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)} \\ &= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2}. \end{aligned}$$

Diese Form ist besonders vorteilhaft, weil kein Problem mehr bei $x = 0$ durch den Term x^2 entsteht.

4) Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$. Da die Wurzelfunktion stetig ist, folgt aus $x \rightarrow 0$ sofort $x^2 \rightarrow 0$ und damit

$$\sqrt{4+x^2} \rightarrow \sqrt{4} = 2.$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

5) Wahl von a und Begründung der Stetigkeit. Damit f in 0 stetig ist, muss gelten

$$a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Wählen wir also

$$a = \frac{1}{4},$$

so ist f in 0 stetig. Zusammen mit Schritt 1 folgt: f ist dann in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Eindeutigkeit: Ist $a \neq \frac{1}{4}$, so gilt zwar weiterhin $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4}$, aber dann ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0),$$

also ist f in 0 nicht stetig. Folglich ist $a = \frac{1}{4}$ die *einzige* Wahl, die globale Stetigkeit liefert.

Ergebnis: Genau für $a = \frac{1}{4}$ ist f überall stetig. □

Aufgabe 8. Betrachten Sie folgende Potenzreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{k} \right)^k x^k.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

(b) Bestimmen Sie, ob für $x \in \{-\rho, \rho\}$ die Reihe konvergiert. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Sei $f : [-\frac{7}{8}\rho, \frac{7}{8}\rho] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{k} \right)^k x^k.$$

Bestimmen Sie, ob f stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Wir schreiben die Reihe in der Standardform einer Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k := \left(\frac{2k+1}{k} \right)^k.$$

(a) **Konvergenzradius.** Für Potenzreihen gilt die bekannte Formel

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Wir berechnen daher $\sqrt[k]{|a_k|}$. Da $a_k > 0$ ist, können wir Beträge weglassen:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\left(\frac{2k+1}{k} \right)^k} = \frac{2k+1}{k} = 2 + \frac{1}{k}.$$

Damit folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{k} \right) = 2.$$

Also ist

$$\rho = \frac{1}{2}.$$

(b) **Randpunkte** $x = \pm\rho$. Wir untersuchen die Reihe an den beiden Randpunkten $x = \rho = \frac{1}{2}$ und $x = -\rho = -\frac{1}{2}$.

Fall $x = \frac{1}{2}$. Dann ist das k -te Glied der Reihe

$$a_k x^k = \left(\frac{2k+1}{k} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^k = \left(1 + \frac{1}{2k} \right)^k.$$

Für eine notwendige Bedingung der Konvergenz einer Reihe muss das Folgenglied gegen 0 gehen. Wir betrachten daher den Grenzwert:

$$\left(1 + \frac{1}{2k} \right)^k = \left[\left(1 + \frac{1}{2k} \right)^{2k} \right]^{1/2}.$$

Da $(1 + \frac{1}{2k})^{2k} \rightarrow e$, folgt

$$\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^k \rightarrow \sqrt{e} \neq 0.$$

Die Glieder gehen also nicht gegen 0. Daher divergiert die Reihe für $x = \frac{1}{2}$.

Fall $x = -\frac{1}{2}$. Hier ist das k -te Glied

$$a_k x^k = \left(\frac{2k+1}{k}\right)^k \left(-\frac{1}{2}\right)^k = (-1)^k \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k = (-1)^k \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^k.$$

Der Betrag dieses Gliedes ist wieder

$$|a_k x^k| = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^k \rightarrow \sqrt{e} \neq 0.$$

Insbesondere gilt $a_k x^k \not\rightarrow 0$. Also divergiert die Reihe auch für $x = -\frac{1}{2}$.

Damit ist

für beide Randpunkte $x \in \{-\rho, \rho\}$ divergiert die Reihe.

(c) Stetigkeit der Summenfunktion auf $[-\frac{7}{8}\rho, \frac{7}{8}\rho]$. Wir betrachten das Intervall

$$\left[-\frac{7}{8}\rho, \frac{7}{8}\rho\right] = \left[-\frac{7}{16}, \frac{7}{16}\right],$$

da $\rho = \frac{1}{2}$.

Schritt 1: Gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall. Seien f_n die Partialsummen:

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k x^k \quad (x \in [-\frac{7}{16}, \frac{7}{16}]).$$

Dann ist f_n als Polynom stetig. Wir zeigen, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Für $|x| \leq \frac{7}{16}$ gilt:

$$|a_k x^k| = \left(\frac{2k+1}{k}\right)^k |x|^k = \left(2 + \frac{1}{k}\right)^k |x|^k \leq \left(2 + \frac{1}{1}\right)^k |x|^k = 3^k |x|^k,$$

denn $2 + \frac{1}{k} \leq 3$ für alle $k \geq 1$. Somit erhalten wir für $|x| \leq \frac{7}{16}$:

$$|a_k x^k| \leq 3^k \left(\frac{7}{16}\right)^k = \left(\frac{21}{16}\right)^k.$$

Diese Abschätzung ist *noch nicht* hilfreich, weil $\frac{21}{16} > 1$. Daher benutzen wir stattdessen das Wurzelkriterium direkt auf dem Intervall mit einem festen Faktor $r < \rho$.

Da $|x| \leq \frac{7}{8}\rho$ gilt, existiert ein r mit

$$|x| \leq r < \rho = \frac{1}{2} \quad (\text{hier konkret: } r = \frac{7}{16}).$$

Betrachte die Reihe $\sum_{k \geq 1} a_k r^k$. Für ihre Glieder gilt

$$\sqrt[k]{a_k r^k} = \sqrt[k]{a_k} r = \left(2 + \frac{1}{k}\right) r \rightarrow 2r = 2 \cdot \frac{7}{16} = \frac{7}{8} < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k$ (sogar absolut). Nun gilt für alle x mit $|x| \leq r$:

$$|a_k x^k| \leq a_k r^k.$$

Also majorisiert die konvergente Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k$ die Funktionsreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ auf $[-r, r]$. Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium konvergiert die Potenzreihe auf $[-r, r]$ *gleichmäßig*.

Schritt 2: Stetigkeit des Grenzwerts. Da jede Partialsumme f_n stetig ist und $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $[-\frac{7}{16}, \frac{7}{16}]$ konvergiert, folgt aus dem Standardsatz:

Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig.

Also ist f auf $[-\frac{7}{16}, \frac{7}{16}]$ stetig, insbesondere auf $[-\frac{7}{8}\rho, \frac{7}{8}\rho]$.

Ergebnis:

$$\rho = \frac{1}{2}, \quad \text{die Reihe divergiert für } x = \pm\rho, \quad f \text{ ist stetig auf } \left[-\frac{7}{8}\rho, \frac{7}{8}\rho\right].$$

□