LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher, Maximilian Wank

Wintersemester 2013/14
19.12.2013

Analysis einer Veränderlichen

Probeklausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________ Fachsemester: ____________

Abschluss: Bachelor, PO ❏ 2007 ❏ 2010 ❏ 2011 Master, PO ❏ 2010 ❏ 2011

Lehramt Gymnasium: ❏ modularisiert ❏ nicht modularisiert

❏ Diplom ❏ Anderes: ____________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, einseitig per Hand beschriebene A4 Seite in der Klausur zu benutzen. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite. Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
max. Punkte	**3**	**2**	**4**	**4**	**3**	**3**	**4**	**2**	**2**
Punkte									

Σ Gesamt (max. 27)	

Viel Erfolg !

Name: ____

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Beweisen Sie die Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

mittels vollständiger Induktion.

Lösung zu Aufgabe 1

Induktionsanfang $n = 0$: klar! [+1]

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: [+1/2 von wo nach wo]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} k^3\Big) + (n+1)^3 \\
&\overset{[+1/2]}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \text{nach Induktionsvorausssetzung [+1/2 Hinweis]} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4(n+1)\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2. && \text{[+1/2 für Rechnung]}
\end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 2 **2 Punkte**

Sei

$$a_n := \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$.

Lösung zu Aufgabe 2

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} && \texttt{[+1]}\text{ nach Vorlesung} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} && \texttt{[+1/2 Vereinfachung so, dass Grenzwert erkennbar]} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} && \texttt{[+1/2]} \end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Beweisen Sie mit der Eulerschen Formel (d.h. mit Hilfe der Definition von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die komplexe Exponentialfunktion) die Gleichung

$$\cos(3x) = 4(\cos(x))^3 - 3\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Es gilt $\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix))$.

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \mathrm{Re}(\exp(i3x)) \quad \texttt{[+1/2 Anwendung Eulersche Formel]} \\
&= \mathrm{Re}\big((\exp(ix)^3\big) \quad \texttt{[+1 für Ansatz mit Potenzgesetz]} \\
&= \mathrm{Re}\big((\cos x + i\sin x)^3\big) \quad \texttt{[+1/2 Anwendung Eulersche Formel]} \\
&= \mathrm{Re}\big((\cos x)^3 + 3(\cos x)^2(i\sin x) + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\big) \quad \texttt{[+1]} \\
&= (\cos x)^3 - 3\cos x\sin x^2 \quad \texttt{[+1/2 für richtiger Realteil]} \\
&= (\cos x)^3 - 3\cos x(1-\cos x^2) \quad \texttt{[+1/2 Eleminierung von sin]} \\
&= 4(\cos(x))^3 - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei $M := \{(x, y) : x^2 + 3y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Ist M abgeschlossen? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Ist M kompakt? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 4 a) M abgeschlossen. [+1/2] Begründung folgt:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 3y^2$. Dann ist f offensichtlich stetig [+1/2].

Da $x^2 + 3y^2 \geq 0$, gilt $M = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 \in [0, 1]\} = f^{-1}([0, 1])$ [+1/2]. Damit ist f als Urbild der abgeschlossenen [+1/2] Menge $[0, 1]$ ebenfalls abgeschlossen [+1/2 für Argument].

b) M ist kompakt. [+1/2] Begründung folgt:

Nach Heine-Borel und dem ersten Teil, müssen wir noch zeigen, dass M beschränkt ist. [+1/2 Heine-Borel zitiert oder angewendet].

Für $(x, y) \in M$ gilt $x^2 \leq 1$ und $y^2 \leq \frac{1}{3}$, also insbesondere $|x| \leq 1$ und $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Damit ist M beschränkt. [+1/2 für Beschränktheit]

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Es sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die zusätzlich der Gleichung $f(0) = f(2)$ genügt. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = f(\xi + 1)$ existiert.

Lösung zu Aufgabe 5

Falls $f(0) = f(1)$, dann sind wir schon fertig mit $\xi = 0$ `[+1/2 für diesen Spezialfall]`. Also können wir im Folgenden annehmen, dass $f(0) \neq f(1)$.
Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x+1) - f(x)$. Dann gilt $g(0) = f(1) - f(0) \neq 0$.
Es gilt

$$g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -g(0).$$

Da $g(0) \neq 0$ und $g(1) = -g(0)$, haben $g(0)$ und $g(1)$ also verschiedene Vorzeichen `[+1]`. Da g außerdem stetig `[+1/2]` existiert nach dem Zwischenertsatz ein $\xi \in (0,1)$ mit $g(\xi) = 0$ `[+1]`. Daraus folgt $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 6 **3 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf A. Sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge aus A. Zeigen Sie, dass $(f(a_n))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

Lösung zu Aufgabe 6

Sei $\varepsilon > 0$.
Da f gleichmäßig stetig, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall x, y \in A : |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad \texttt{[+1]}$$

Da $(a_n)_n$ Cauchyfolge, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|a_n - a_m| < \delta \qquad \text{für alle } n, m \geq N. \qquad \texttt{[+1]}$$

Folglich gilt

$$|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N. \quad \texttt{[+1]}$$

Somit ist $f(a_n)$ eine Cauchyfolge.

Alternative fehlerhafte Lösung [maximal 2 Punkte]:

Da f is gleichmäßig stetig, ist f stetig [+1/2].

Da $(a_n)_n$ Cauchyfolge, existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ [+1/2].

FEHLER: Da A nicht abgeschlossen sein muss, können wir nicht $a \in A$ folgern, was später für die Stetigkeit gebraucht wird. [Hier fehlt der Punkt.] Im der nachfolgenden Lösung gehen wir trotzdem von $a \in A$ aus.

Da f stetig auf A, gilt $f(a_n) \to f(a)$. [+1/2]

Damit ist $f(a_n)$ ebenfalls eine Cauchyfolge [+1/2].

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 7 **4 Punkte**

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,2^n} x^n.$$

Bestimmen Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{die Reihe konvergiert}\} \text{ und } M_2 := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{die Reihe konvergiert absolut}\}.$$

Lösung zu Aufgabe 7

Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{n\,2^n} x^n$.
Wurzelkriterium:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|x|}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{2}. \quad \texttt{[+1]}$$

Damit konvergiert die Reihe absolut für $|x| < 2$ [+1/2] und divergiert für $|x| > 2$ [+1/2].

Es bleiben die Fälle $x = -2$ und $x = 2$. [+1/2 für Erkennen des Problems.]

Fall $x = 2$. Die Reihe ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Die Reihe konvergiert [+1/2], aber nicht absolut [+1/2].

Fall $x = -2$. Die Reihe ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Die Reihe konvergiert nicht. [+1/2]

Damit folgt $M_1 = (-2, 2]$ und $M_2 = (-2, 2)$.

(Alternative: Quotientenkriterium):

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n\,|x|}{2(n+1)} \to \frac{|x|}{2}.$$

Bemerkung: Die Reihe ist nur für $x \geq 0$ alternierend.

Bemerkung: Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert, falls a_n eine monotone(!) Nullfolge ist. Die Nullfolgeneigenschaft reicht nicht für die Konvergenz.

Bemerkung: Die folgende fehlerhafte Lösung ergibt nur 2 Punkte: Wurzelkriterium:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|x|}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{2}. \quad \texttt{[+1]}$$

Damit konvergiert die Reihe genau dann (FEHLER), wenn $|x| \leq 2$. [+1/2 für $|x| < 2$] und [+1/2 für $|x| > 2$]. Da die Randbetrachtung fehlt, gibt es keine weiteren Punkte.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 8 **2 Punkte**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ genau dann beschränkt ist, wenn $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Lösung zu Aufgabe 8

$\Rightarrow$: Da $(a_n)_n$ und $(b_n)_n)$ beschränkt, existieren $A, B > 0$ mit $|a_n| \leq A$ und $|b_n| \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ `[+1/2]`. Damit gilt $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq A + B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ `[+1/2]`.
$\Leftarrow$: Da $(a_n)_n$ beschränkt, ist auch $(-a_n)_n$ beschränkt `[+1/2]`. Damit ist nach erstem Teil auch $((a_n + b_n) + (-a_n))_n = (b_n)_n$ beschränkt `[+1/2]`.
(Alternativbeweis: $|b_n| = |(a_n + b_n) - a_n| \leq |a_n + b_n| + |a_n| \leq C + A$.)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 9 **2 Punkte**

Sie (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass es offene Bälle $B_r(x)$ und $B_s(y)$ gibt, so dass $B_r(x) \cap B_s(y) = \emptyset$.

Lösung zu Aufgabe 9

Sei $r := s := \frac{d(x,y)}{2}$. Da $x \neq y$ ist $r > 0$ [+1/2].
Behauptung: $B_r(x) \cap B_s(y) = \emptyset$.
Beweis durch Widerspruch. Sei also $B_r(x) \cap B_s(y) \neq \emptyset$. Dann existiert $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$. Es folgt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \,\texttt{[+1/2]} < r + r \,\texttt{[+1/2]} = d(x, y).$$

Dies ist ein Widerspruch [+1/2].

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.