Mathematisches Institut
Prof. Dr. P. Müller

Klausur
Freitag, 18. Februar 2011

Analysis 1

Klausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Studiengang: ____________________ Nebenfach: ____________________

☐ Ich stimme der Veröffentlichung des Ergebnisses dieser Klausur unter Angabe meiner Matrikelnummer zu.

Bitte **schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus** und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.

Schreiben Sie bitte weder mit Bleistift noch in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.

Alle Lösungen oder Antworten müssen hinreichend detailliert begründet sein.

Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*

Sei $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \ln(\frac{1+x}{1-x})$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^{-n^{3/2}}$$

konvergent oder divergent ist.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*

Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

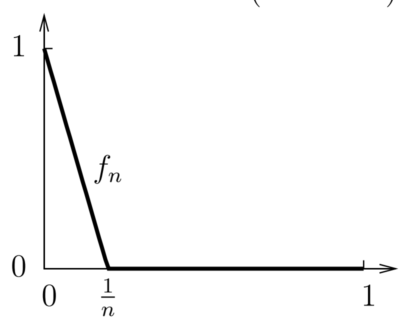
$$\text{(a)}\quad z_1 = \left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{10}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad z_2 = \ln(1+i),$$

wobei ln den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus bezeichnet.

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1-nx, & \text{falls } 0 \le x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



(a) Zeigen Sie: Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise. Geben Sie die Grenzfunktion f an.

(b) Berechnen Sie $s_n := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f?

Aufgabe 5. *(6 Punkte)*

Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und für alle $x \in \mathbb{Q}$ gelte $f(x) = g(x)$.

Zeigen Sie: Es gilt $f = g$, also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. *(6 Punkte)*

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien r_1 bzw. r_2. Der Konvergenzradius der Summen-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$$

werde mit r bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) In jedem Fall gilt $r \ge \min(r_1, r_2)$.

(b) Falls $r_1 < r_2$ ist, gilt $r = r_1$.

(c) Man zeige an jeweils einem Beispiel, dass im Fall $r_1 = r_2 < \infty$ sowohl $r > r_1$ als auch $r = r_1$ vorkommen kann.

Aufgabe 1

Sei $f \; : \;]-1,1[\; \to \; \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

<u>Beweis:</u>

Zunächst ist f wohldefiniert:

$$x \in]-1,1[\implies 1+x>0 \;\wedge\; 1-x>0 \implies \frac{1+x}{1-x}>0 \implies \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ ist sinnvoll.}$$

Beweis der Behauptung durch Induktion über n:

<u>Induktionsanfang</u> $n = 1$:

$\varphi \; : \; \mathbb{R}\setminus\{1\} \;\to\; \mathbb{R};\; x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ ist als rationale Funktion differenzierbar. Mit der Quotientenregel folgt:

$$\varphi'(x) = \frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

und

$$\begin{aligned} f'(x) &\overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \ln'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x) \\ &= \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} \\ &\overset{\text{Partialbruch-}}{\underset{\text{zerlegung}}{=}} \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x} = \underline{\underline{(-1)^{1-1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}+\frac{(1-1)!}{(1-x)^1}}} \end{aligned}$$

<u>Induktionsschritt</u> $n \mapsto n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}+\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

d.h. $f^{(n)}$ ist als rationale Funktion differenzierbar, und es gilt mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &\overset{\text{Def.}}{=} \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &\overset{\text{IV}}{=} (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(1+x)^n\cdot 0-n\cdot(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} + (n-1)!\frac{(1-x)^n\cdot 0-n\cdot(1-x)^{n-1}\cdot(-1)}{(1-x)^{2n}} \\ &= (-1)^n\frac{(n-1)!\cdot n}{(1+x)^{2n-(n-1)}}+\frac{(n-1)!\cdot n}{(1-x)^{2n-(n-1)}} \\ &= \underline{\underline{(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}} \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Entscheiden Sie. ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}$$

konvergent oder divergent ist.

Es darf ohne Beweis benutzt werden, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ konvergiert.

<u>Beweis:</u>

Mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}$$

Nach Voraussetzung ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$,

und da $(a_{k^2})_{k\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a konvergiert, gilt:

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^2}}\right)^{\sqrt{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} = e$$

Damit folgt also

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{e} < 1 \ ,$$

da nach Übung für die Eulersche Zahl e gilt: $e > 2$.

Somit ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

<u>Beweis</u>, daß die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

Sei $f(x) := \ln(1 + x)$ für $x \in]-1, \infty[$. Dann ist für alle $x > 0$ f auf dem Intervall $[0, x]$ stetig differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $0 < \xi(x) < x$, so daß

$$\ln(1 + x) - \ln(1 + 0) = f'(\xi(x)) \cdot x = \frac{1}{1 + \xi(x)} \cdot x \underset{\ln(1)=0}{\Longrightarrow} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{1}{1 + \xi(x)}$$

Wegen $0 < \xi(x) < x$ gilt für $x \to 0$ auch $\xi(x) \to 0$, d.h.

$$\frac{1}{1 + \xi(x)} \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 1 \implies \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Insbesondere gilt dann für die Nullfolge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, daß

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \implies$$

$$\begin{aligned} e &= \exp(1) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{\text{stetig}}{\overset{\exp}{=}} \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\overset{\text{Def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$(a) \quad z_1 = \left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{10} \qquad\qquad (b) \quad z_2 = \ln(1+i)$$

wobei ln den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus bezeichnet.

ad (a)

$$\frac{2+2i}{1-i} = 2\cdot\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = 2\cdot\frac{(1+i)^2}{1-i^2} = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$$

Damit folgt: $\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10}\cdot i^{10} \underset{i^4=1}{=} 2^{10}\cdot i^2 = -2^{10} = -1024$

Also: $\qquad \mathrm{Re}(z_1) = -2^{10} = -1024 \quad\wedge\quad \mathrm{Im}(z_1) = 0$.

ad (b)

Wir benutzen die Polardarstellung komplexer Zahlen:

$z \in \mathbb{C}_l := \{u \in \mathbb{C} \mid u \notin \mathbb{R}_\leq\} \implies$ es gibt eindeutig bestimmte $r > 0$ und $\varphi \in]-\pi,\pi[$, so daß $z = re^{i\varphi} = |z|\,e^{i\varphi}$ ist. Damit folgt für den Hauptzweig des Logarithmus:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i\varphi \quad (\text{mit } \varphi = \arg(z)\ )$$

In $1+i$ sind Realteil und Imaginarteil gleich, d.h. mit der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ folgt mit $\arg(1+i) = \varphi$:

$\cos(\varphi) = \sin(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{4}$, da ja $\varphi \in]-\pi,\pi[$.

Also: $\quad \ln(1+i) = \ln(|1+i|) + i\cdot\frac{\pi}{4} = \ln(\sqrt{2}) + i\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + i\cdot\frac{\pi}{4}$.

Somit: $\qquad \mathrm{Re}(z_2) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2) \quad\wedge\quad \mathrm{Im}(z_2) = \frac{\pi}{4}$

Aufgabe 4

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

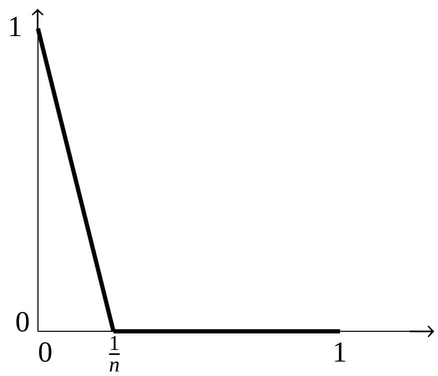
$$f_n(x) := \begin{Bmatrix} 1 - nx & \text{falls } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix}$$

(a) Zeigen Sie: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise. Geben Sie die Grenzfunktion f an.

(b) Berechnen Sie $s_n := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ für $n \in \mathbb{N}$

(c) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f ?

Skizze:



ad (a):

Für $x = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \implies f(0) := 1$

Für $0 < x \le 1$: Nach Archimedes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{x}$, so daß für alle $n \ge N$: $0 < \dfrac{1}{n} < x$

Also nach Definition von f_n : $\forall\, n \ge N$: $f_n(x) = 0$, d.h. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies f(x) := 0$

Für die Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt also: $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } 0 < x \le 1 \end{Bmatrix}$

ad (b):

Es ist $f_n(x) - f(x) = \begin{Bmatrix} 1 - 1 = 0 & \text{für } x = 0 \\ f_n(x) & \text{für } x > 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für} & x = 0 \\ 1 - nx & \text{für} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für} & \frac{1}{n} \le x \end{Bmatrix}$

Weil $0 < x < \frac{1}{n} \iff 0 > -x > -\frac{1}{n} \iff 0 > -nx > -1 \iff 1 > 1 - nx > 0$

folgt also: $|f_n(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in [0,1] \implies \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le 1$

Andererseits gilt für festes $n \in \mathbb{N}$: für alle $\mathbb{N} \ni k > n$ ist $0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{n}$, also ist

$$1 \ge s_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \ge \left|f_n(\tfrac{1}{k}) - f(\tfrac{1}{k})\right| = 1 - n \cdot \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

Also gilt $s_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ad (c):

Entweder :

würde f_n gleichmäßig gegen f konvergieren, so nach Definition
$s_n = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad ↯ \; s_n = 1$ stets

Oder:

Wegen $f(\frac{1}{k}) = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \neq 1 = f(0)$ ist die Grenzfunktion f in 0 nicht stetig.
Andererseits sind alle Folgenterme f_n in $[0,1]$ stetig: für $x \in]\frac{1}{n}, 1]$ als Nullfunktion, in $[0, \frac{1}{n}[$ als Polynom. Bleibt der Punkt $x = \frac{1}{n}$ zu untersuchen:
wegen $\lim\limits_{x\uparrow\frac{1}{n}} f_n(x) = \lim\limits_{x\uparrow\frac{1}{n}}(1-nx) \overset{\text{Polynom}}{\underset{\text{stetig}}{=}} 1 - n\frac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{x\downarrow\frac{1}{n}} 0 = \lim\limits_{x\downarrow\frac{1}{n}} f_n(x)$ folgt nach Vorlesung die Stetigkeit von f_n auch im Punkte $x = \frac{1}{n}$, also ist f_n auf ganz $[0,1]$ stetig.

Wäre nun f_n gleichmäßig konvergent gegen f, so wäre nach Vorlesung (Satz 3.33) auch die Grenzfunktion f stetig, was aber nicht der Fall ist. Also ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Aufgabe 5

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und für alle $x \in \mathbb{Q}$ gelte $f(x) = g(x)$.
Zeigen Sie: Es gilt $f = g$, also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Zu zeigen: $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;:\; f(x) = g(x)$
Sei also $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

(zum Beispiel über die b-adische Darstellung $x = \eta \cdot \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{N} \frac{a_k}{b^k}$ mit $n_0 \in \mathbb{Z},\ \eta \in \{-1, +1\}$

und $a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$; wähle $q_n := \eta \cdot \sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{a_k}{b^k} \in \mathbb{Q}$).

Da f, g stetig in x sind, folgt:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) \underset{\text{stetig}}{\overset{f}{=}} \lim_{n\to\infty} f(q_n) \underset{f(q_n)=g(q_n)}{=} \lim_{n\to\infty} g(q_n) \underset{\text{stetig}}{\overset{g}{=}} g(\lim_{n\to\infty} q_n) = g(x)$$

Alternativ:

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest und $\epsilon > 0$ beliebig. Da f, g in a stetig sind gilt:
$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2}$ $(\star)$
Nun ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, d.h. es gibt ein $q \in \mathbb{Q} \cap\,]a - \delta, a + \delta[$,
also
$|f(a) - g(a)| \underset{f(q)=g(q)}{\overset{q\in\mathbb{Q}}{=}} |f(a) - f(q) + g(q) - g(a)| \underset{\text{Ungl.}}{\overset{\Delta}{\leq}} |f(a) - f(q)| + |g(q) - g(a)| \underset{\star}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$,
da ja $|q - a| < \delta$.
Dies gilt für alle $\epsilon > 0$, also $f(a) = g(a)$ q.e.d.

Aufgabe 6

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien r_1 bzw r_2 .
Der Konvergenzradius der Summen-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

werde mit r bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) In jedem Fall gilt $r \geq \min(r_1 . r_2)$

(b) Falls $r_1 < r_2$ ist, gilt $r = r_1$

(c) Man zeige an jeweils einem Beispiel, daß im Fall $r_1 = r_2 < \infty$ sowohl $r > r_1$ als auch $r = r_1$ vorkommen kann.

ad (a):

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min(r_1, r_2) \leq r_i \quad (i = 1, 2)$; nach Definition des Konvergenzradius sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ beide konvergent, also auch die Summen-Reihe, und es gilt:

$$\mathbb{C} \ni \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n + b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \ .$$

Damit aber folgt: $r = \sup\{\ |z|\ \mid z \in \mathbb{C} \wedge \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \text{ konvergiert } \} \geq \min(r_1, r_2)$

ad (b):

Sei $r_1 < r_2 \underset{(a)}{\Longrightarrow} r \geq \min(r_1, r_2) = r_1$.

Wäre $r_1 < r$, so gäbe es ein $q \in \mathbb{R}_>$ mit $r_1 < q < \min(r, r_2) \leq r,\ r_2 \Longrightarrow$
$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) q^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$ sind beide konvergent, da q innerhalb der Konvergenzkreise liegt.
Aus den Grenzwertsätzen für Folgen/Reihen folgt dann aber, daß auch die Differenzreihe
$\sum_{n=0}^{\infty} [(a_n + b_n) q^n - b_n q^n] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ konvergiert, d.h. nach Definition des Konvergenzradius'
muß gelten: $q = |q| \leq r_1 \quad ↯ \quad r_1 < q$

ad (c): Es sei $r_1 = r_2 < \infty$

- Wähle $a_n := 1 = -b_n \implies r_1 = r_2 = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = \dfrac{1}{1} = 1 < \infty$ und

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 \cdot z^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, hat also den Konvergenzradius $r = \infty > 1 = r_1$.

- Wähle $a_n = 1 = b_n \overset{\text{siehe}}{\underset{\text{oben}}{\implies}} r_1 = r_2 = 1$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2 \cdot z^n$,

  und mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ folgt $r = 1 = r_1$.

  (Man beachte: $\forall\ 1 < 2 \le n\ :\ 1 < \sqrt[n]{2} \le \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \overset{\text{Sandwich-}}{\underset{\text{Lemma}}{\implies}} \sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$).