Mathematisches Institut
Prof. Dr. P. Müller

Probeklausur
Samstag, 11. Dezember 2010

Analysis 1

Probeklausur

Nachname: ________________ Vorname: ________________

Matrikelnr.: ________________ Fachsemester: ________________

Studiengang: ________________

Bitte **schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus** und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.

Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.

Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*

Es sei (a_n) die Zahlenfolge mit

$$a_n = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + 5^{-n}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Untersuche, ob (a_n) konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*

Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Definiere:

(a) (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn ...

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent* mit der Summe s, wenn ...

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$. Gib den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $w := \overline{z}^2 + \dfrac{1}{z^2}$ an.

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq k \leq n$ sei $a_k \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq a_k \leq 0$ gegeben. Beweise mit vollständiger Induktion:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Aufgabe 5. *(6 Punkte)*

Bestimme alle Häufungswerte sowie Limes inferior und Limes superior der reellen Folge (a_n) mit

(a) $a_n = -n \qquad (n \in \mathbb{N})$;

(b) $a_n = (-n)^{\mathrm{Re}(i^n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 6. *(6 Punkte)*

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, von oben beschränkte Menge und $S := \sup A$.

Zeige: Es gibt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $a_n \to S \ (n \to \infty)$.

1. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n := \dfrac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+5^{-n}}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

Untersuche, ob $(a_n)_n$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung:

Für den Nenner gilt $\sqrt{n} + \dfrac{1}{5^n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge ist wohldefiniert.
Man forme um:

$$a_n = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+5^{-n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{n}+5^{-n}\right)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^n}}$$

Nun ist die Folge $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge:

$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : N > \frac{1}{\epsilon^2}$ (nach Archimedes), also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$n \geq N \implies \dfrac{1}{\epsilon^2} < n \implies \dfrac{1}{\epsilon} < \sqrt{n} \implies 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon\,,\quad$ also $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Nach Tutorium und Übung ist auch $\left(\frac{1}{5^n}\right)_n$ eine Nullfolge $(0 < \frac{1}{5} < 1)$, und so konvergiert nach den Grenzwertsätzen auch $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{5^n}\right)_n$ gegen 0.

Dann gilt für die

Zählerfolge $\quad Z_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + 0 = 0$

Nennerfolge $\quad N_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 0 = 1 \neq 0$

d.h nach dem Quotientensatz: $\quad a_n = \dfrac{Z_n}{N_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{0}{1} = 0$.

Alternativ:

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 3$ (da $\sqrt{n} \geq 1$) $\quad$ und $\quad \sqrt{n} + \frac{1}{5^n} > \sqrt{n} \quad\implies$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & a_n & = & \dfrac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+5^{-n}} & \leq & \dfrac{3}{\sqrt{n}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

und damit liefert der Einschließungssatz („Sandwich-Lemma“), daß $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Natürlich muß auch hier wie oben bewiesen werden, daß die Folge $\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)_n$ eine Nullfolge ist.

2 Sei $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge. Definiere:

(a) $(a_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn:

$$\forall\, \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq N\ :\ |a_n - a_m| < \epsilon$$

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent* mit der Summe s, wenn:

die Partialsummenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gegen s konvergiert, d.h wenn

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N\ :\ |S_n - s| < \epsilon$$

3 Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$. Gib den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $w := \overline{z}^2 + \dfrac{1}{z^2}$ an.

Lösung:

Es ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ und $\overline{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - i(2xy)$.
Damit folgt:

$$\begin{aligned}\overline{z}^2 + \frac{1}{z^2} &= \overline{z}^2 + \frac{\overline{z}^2}{z^2 \cdot \overline{z}^2} = \overline{z}^2\left(1 + \frac{1}{(z \cdot \overline{z})^2}\right) = \overline{z}^2\left(1 + \frac{1}{(|z|^2)^2}\right) = \overline{z}^2\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right) \\ &= (x^2 - y^2 - 2xyi) \cdot \left(1 + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\right)\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w) &= (x^2 - y^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\right) \\ \mathrm{Im}(w) &= -2xy \cdot \left(1 + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\right)\end{aligned}$$

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq k \leq n$ sei $a_k \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq a_k \leq 0$ gegeben. Beweise mit vollständiger Induktion:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Lösung:

Induktionsanfang $n = 1$: $\prod_{k=1}^{1}(1+a_k) = 1 + a_1 \geq 1 + a_1 = 1 + \sum_{k=1}^{1} a_k$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$: $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ (IV)

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) &= \left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\cdot(1+a_{n+1}) \\
&\underset{(*)}{\overset{\text{IV}}{\geq}} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot(1+a_{n+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} + a_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k + \underbrace{a_{n+1}}_{\leq 0}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\leq 0} \\
&\underset{(**)}{\geq} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k
\end{aligned}$$

Dabei gilt $(*)$, weil mit $-1 \leq a_{n+1}$ folgt, daß $0 \leq 1 + a_{n+1}$, dh. die Multiplikation mit diesem Term die größer-gleich-Relation bei $(*)$ nicht verändert, und es gilt $(**)$, weil in einem angeordneten Körper die Multiplikation zweier Elemente, die kleiner-gleich Null sind, ein Element größer gleich Null ergibt: $u, v \leq 0 \implies uv \geq 0$.

Damit ist $a_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0$, und $(**)$ ist gerechtfertigt.

(5) Bestimme alle Häufungswerte sowie Limes inferior und Limes superior der reellen Folge $(a_n)_n$ mit

(a) $a_n = -n \qquad (n \in \mathbb{N})$

(b) $a_n = (-n)^{Re(i^n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Lösung:

ad (a):

Für jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt: $a_{n_k} = -n_k \leq -k$, da ja $n_k \geq k$ (wie in den Übungen gezeigt).
Damit aber gilt $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$
(Für alle $S \in \mathbb{N}$ gibt es $L \in \mathbb{N}$, nämlich $L := S$, so daß für alle $l \geq L = S$:
$a_{n_l} \leq -l \leq -L = -S$ q.e.d.)
Damit gibt es keine konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$, also auch keinen Häufungspunkt dieser Folge.

Weiter gilt, da $a_{n+1} = -(n+1) < -n = a_n$, d.h. die Folge streng antiton ist:

$y_n^+ := \sup\{a_k \mid k \geq n\} = a_n = -n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \implies \limsup(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^+ = -\infty$

$y_n^- := \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \inf\{-k \mid k \geq n\} = -\infty \overset{\text{Def.}}{\underset{\text{Vorl.}}{\implies}} \liminf(a_n) = -\infty$

ad (b):

$\forall\ k \in \mathbb{N}\ :\ i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$, d.h. $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i, \quad i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1, \quad i^{4k+3} = i^{4k+2} \cdot i = -i \implies$

$Re(i^{4k}) = 1, \quad Re(i^{4k+1}) = Re(i^{4k+3}) = 0, \quad Re(i^{4k+2}) = -1$

Es gilt also für alle $k \in \mathbb{N}$: $a_{4k+1} = (-(4k+1))^0 = 1$, d.h. die Teilfolge $(a_{4k+1})_k$ hat den Grenzwert 1 .
Weiter für alle $k \in \mathbb{N}$: $a_{4k+2} = (-(4k+2))^{-1} = -\frac{1}{4k+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad (0 > -\frac{1}{4k+2} > -\frac{1}{k}\ )$,
d.h. die Teilfolge $(a_{4k+2})_k$ hat den Grenzwert 0. Somit hat die Folge $(a_n)_n$ die beiden Häufungspunkte 0 und 1.

Ferner gilt für alle $k \in \mathbb{N}$: $a_{4k} = (-4k)^1 = -4k \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$
Damit zeigen wir:

(i) Die Folge hat keine weiteren Häufungspunke neben 0 und 1 :
Wäre $a \notin \{0,1\}$ ein weiterer Häufungspunkt, so gäbe es mit Aufgabe 24 zu $\epsilon := \frac{1}{2} \cdot \min\{|a|, |a-1|\}$ und zu $N \geq |a| + \frac{2}{|a|} + \epsilon$ ein $n \geq N$, so daß $|a_n - a| < \epsilon$.
Nun ist aber $Re(i^n) \in \{-1, 0, 1\}$, d.h. es gilt entweder

$\left|(-n)^1 - a\right| = |n + a| \geq n - |a| \geq N - |a| \geq \epsilon$ (Wahl von N) oder

$\left|(-n)^0 - a\right| = |1 - a| > \epsilon$ (Wahl von ϵ) oder

$\left|(-n)^{-1} - a\right| = \left|a + \frac{1}{n}\right| \geq |a| - \frac{1}{n} \geq \epsilon$,

und dies letztere weil $n \geq N \geq \frac{2}{|a|} \implies \frac{|a|}{2} \geq \frac{1}{n} \implies |a| - \frac{1}{n} \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} \geq \epsilon$

(ii) $y_n^+ = \sup\{a_k \mid k \geq n\} = 1$ (für $k = 4n$, und da alle Folgenterme $a_n \leq 1$)

$\implies \limsup(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^+ = 1$

(iii) $y_n^- = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq a_{4n} = -4n \implies \liminf(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^- = -\infty$

Die Eindeutigkeit der Häufungspunkte in Teil $(b), (iii)$ kann man auch folgendermaßen zeigen: Sei $(a_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$; dann ist die Teilfolge beschränkt, d.h. es gibt ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\forall\ k \in \mathbb{N}\ :\ \left|a_{n_k}\right| < K$. Da aber $|a_{4m}| = 4m > K$ für $m > K$, kann es nur endlich viele Indizes n_k der Gestalt $n_k = 4m$ geben. Da aber mit $(n_k)_k$ streng isoton die Menge $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ unendlich ist, müssen entweder unendlich viele der Terme n_k ungerade sein oder aber von der Gestalt $4m + 2\ (m \in \mathbb{N})$.
Im ersten Fall hat die Teilfolge $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge $\left(a_{n_{k_l}}\right)_l$ mit $a_{n_{k_l}} = 1$ für alle $l \in \mathbb{N}$, die damit gegen 1 konvergiert, weshalb auch die Teilfolge selbst (da konvergent) gegen 1 konvergiert, im zweiten Fall hat sie eine Teilfolge $\left(a_{n_{k_l}}\right)_l$ mit $a_{n_{k_l}} = -\frac{1}{n_{k_l}}$ für alle $l \in \mathbb{N}$, die mit $l \longrightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, so daß auch die ursprüngliche Teilfolge eine Nullfolge ist. In beiden Fällen erhält man entweder Grenzwert 0 oder 1 .

6 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, von oben beschränkte Menge und $S := \sup A$.
Zeige: Es gibt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.

Lösung:

$S \in \mathbb{R}$ existiert, da $A \neq \emptyset$ nach oben beschränkt ist.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $S - \frac{1}{k} < S$, d.h. mit der Definition von S als kleinster oberer Schranke von A ist $S - \frac{1}{k}$ keine obere Schranke von A mehr, weshalb es ein Element $a_k \in A$ geben muß mit der Eigenschaft

$$S - \frac{1}{k} < a_k \leq S$$

Damit ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $a_k \in A$ definiert und somit eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A.
Für diese gilt:

$$\begin{array}{ccccc} S - \frac{1}{k} & < & a_k & \leq & S \\ {\scriptstyle k\to\infty}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle k\to\infty} \\ S & & & & S \end{array}$$

Nach dem Einschließungssatz ist damit $(a_k)_k$ konvergent mit Grenzwert S.