Mathematisches Institut
der Universität München Wintersemester 2009/2010

Analysis einer Variablen

Musterlösung der Klausur

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{n^2}{3^n} < \frac{1}{n} \qquad \text{für } n > 3.$$

Lösung

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass $\frac{n^3}{3^n} < 1$, also $\frac{n^2}{3^n} < \frac{1}{n}$.
Induktionsanfang für $n = 4$:

$$\frac{n^3}{3^n} = \frac{4^3}{3^4} = \frac{64}{81} < 1$$

Induktionsschritt: Sei $n \geq 4$. Wir zeigen die Aussage für $n+1$, mit Hilfe der Induktionsannahme $\frac{n^3}{3^n} < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} &= \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3\cdot 3^n} = \frac{n^3}{3^n}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3n^3}\right) \\ &< \frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3n^3} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3} \\ &< \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2} = \frac{2}{3}+\frac{1}{8} < 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Für welche $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k^n}$$

konvergent?

Lösung

Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge, also ist für $k = 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^1}{1^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ divergent.

Für $k > 1$ konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium (sogar absolut), denn:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k/k^{n+1}}{n^k/k^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{k} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{k} = 1^k \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} < 1$$

Aufgabe 3

Wie oft ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x \geq 0 \\ -x^2 e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ differenzierbar?

Lösung

Da der links- und rechtsseitige Differentialquotient existieren und übereinstimmen, ist f in 0 differenzierbar:

$$\begin{aligned} \lim_{x\searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2 e^x - 0}{x} = \lim_{x\searrow 0} x e^x = 0 \\ \lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\nearrow 0} \frac{-x^2 e^{-x} - 0}{x} = -\lim_{x\nearrow 0} x e^x = 0 \end{aligned}$$

Es gilt also $f'(0) = 0$.

In $(0, \infty)$ und $(-\infty, 0)$ ist f jeweils ein Produkt differenzierbarer Funktionen, lässt sich also nach der Produktregel differenzieren: Für $x > 0$ gilt daher $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (2+x)xe^x$, und für $x < 0$ gilt $f'(x) = -2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = (-2 + x)xe^x$. Damit können wir zeigen, dass f' in 0 nicht mehr differenzierbar ist:

$$\begin{aligned} \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x\searrow 0} \frac{(2+x)xe^x - 0}{x} = \lim_{x\searrow 0} (2+x)e^x = 2 \\ \lim_{x\nearrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x\nearrow 0} \frac{(-2+x)xe^{-x} - 0}{x} = \lim_{x\nearrow 0} (-2+x)e^x = -2 \end{aligned}$$

Der linksseitige und der rechtsseitige Differentialquotient von f' in 0 stimmen also nicht überein. Insgesamt folgt hieraus, dass f in 0 genau einmal differenzierbar ist.

(**Vorsicht:** Ein alternativer Lösungsweg ist, statt der Differentialquotienten die Grenzwerte $\lim_{x\searrow 0} f'(x)$ und $\lim_{x\nearrow 0} f'(x)$ zu betrachten. In diesem Fall muss zusätzlich die Stetigkeit von f in 0 gezeigt werden, da sonst nicht Differenzierbarkeit folgt!)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 = 1 + x$$

im Intervall $(1, \infty)$ genau eine Lösung hat.

Lösung

Eine reelle Zahl $x_0 \in (1, \infty)$ ist Lösung von $x^4 = 1 + x$ genau dann, wenn $x_0^4 - x_0 - 1 = 0$ ist, wenn also x_0 Nullstelle der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - x - 1$$

ist. Daher genügt es zu zeigen, dass f genau eine Nullstelle in $(1, \infty)$ hat. Als Polynom ist f differenzierbar (und damit auch stetig) und es gilt $f'(x) = 4x^3 - 1$. Für $x > 1$ ist also $f'(x) > 4 - 1 = 3$. Daher ist f streng monoton wachsend im Intervall $(1, \infty)$. Folglich kann f dort *höchstens* eine Nullstelle haben.

Wegen $f(1) = -1 < 0 < 13 = f(2)$ hat f aber nach dem Zwischenwertsatz *mindestens* eine Nullstelle in $(1, 2)$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = (\cos x)^{\ln(\sin x)}, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Lösung

Nach Definition der Exponentiation reeller Zahlen ist $(\cos x)^{\ln(\sin x)} = e^{\ln(\cos x)\ln(\sin x)}$. Dies ist im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ wohldefiniert, da hier Sinus und Kosinus positiv sind. Nach der Ketten- und Produktregel ist f differenzierbar und mit $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ und $\ln' y = \frac{1}{y}$ erhalten wir folgende Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(\cos x)\ln(\sin x)} \cdot (\ln(\cos x)\ln(\sin x))' \\ &= (\cos x)^{\ln(\sin x)} \cdot ((\ln(\cos x))' \ln(\sin x) + \ln(\cos x)(\ln(\sin x))') \\ &= (\cos x)^{\ln(\sin x)} \cdot \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \ln(\sin x) + \ln(\cos x) \frac{\cos x}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n$$

und geben Sie den Wert der Reihe im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

Lösung

Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{2}$, da:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$$

Für $|x| < \frac{1}{2}$ gilt (geometrische Reihe!):

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

Bei $x = \frac{1}{3}$ nimmt die Reihe also den Wert $\frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 6$ an.