Prof. Dr. H. Garcke, Dr. H. Farshbaf-Shaker, D. Depner
NWF I - Mathematik
Universität Regensburg

WS 08/09
15.04.2009

Lösungsvorschlag zur Nachklausur zur Analysis I

6 Punkte pro Aufgabe

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz für $n \to \infty$.

$$(i) \quad a_n = \frac{(1-2n)^2}{n^2+4}\,, \qquad (ii) \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+2}\,, \qquad (iii) \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}\,.$$

Beh.: (i) $a_n \to 4$, (ii) a_n ist konvergent, (iii) $a_n \to \exp(2) - 1$.
Beweis: zu (i): Wir schreiben

$$\frac{(1-2n)^2}{n^2+4} = \frac{4n^2-4n+1}{n^2+4} = \frac{4 - 4\frac{1}{n} + 4\frac{1}{n^2}}{1 + 4\frac{1}{n^2}}\,.$$

Nach den Rechenregeln für konvergente Funktionenfolge gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-2n)^2}{n^2+4} = \frac{4 - 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1 + 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{4 - 4\cdot 0 + 4\cdot 0}{1 + 4\cdot 0} = 4\,.$$

zu (ii): Wir verwenden das Leibnizkriterium. Dazu müssen wir zeigen, dass $b_k := \frac{1}{2k+2}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. $b_k \to 0$ sieht man mit einer ähnlichen Methode wie in (i) und die Monotonie erhalten wir durch äquivalente Umformungen der wahren Aussage $k \leq k+1$.

$$\begin{aligned} & k \leq k+1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2k+2 \leq 2(k+1)+2 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2k+2} \geq \frac{1}{2(k+1)+2} \\ \Leftrightarrow\quad & b_k \geq b_{k+1}\,. \end{aligned}$$

zu (iii): Wir verwenden das Quotientenkriterium. Sei $b_k := \frac{2^k}{k!}$. Dann gilt

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{2^{k+1}}{2^k}\frac{k!}{(k+1)!} = 2\frac{1}{k+1} \to 0\,,$$

also ist das Quotientenkriterium erfüllt und wir können auf (absolute) Konvergenz schließen. Da wir die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ auswendig wissen, können wir außerdem sehen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \exp(2) - 1\,.$$

□

Aufgabe 2

(i) Untersuchen Sie die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ auf gleichmäßige Stetigkeit in $(0,1)$.

(ii) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{1+n^2x^2}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Beh.: (i) f ist nicht gleichmäßig stetig, (ii) f_n konvergiert punktweise und gleichmäßig gegen 0.
Beweis: zu (i) Der Beweis wird auf drei Arten geführt.

1. Beweis:

Die Definition von gleichmäßiger Stetigkeit, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in (0,1) \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ so dass } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

wird verneint

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in (0,1) \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ so dass } \; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

und die Verneinung wird gezeigt.
Setze $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{2n}$ gilt: $x, y \in (0,1)$ und

$$|x - y| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} < \delta \quad \text{(Archimedes)}\ .$$

Für dieses x und y gilt

$$|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1\ .$$

2. Beweis:

Annahme f wäre gleichmäßig stetig auf $(0,1)$. Dann gibt es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < 1 \quad \text{für alle } \; x, y \in (0,1) \quad \text{mit } \; |x - y| < \delta\ .$$

Es gibt aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| < \delta \quad \text{und} \quad \left|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n})\right| = n \geq 1\ ,$$

was schließlich der Definition von gleichmäßiger Stetigkeit widerspricht.
1. und 2. Beweis sind in Wahrheit natürlich identisch. Der nächste Beweis benutzt ein Fortsetzungsargument für gleichmäßig stetige Funktionen.

3. Beweis:

Annahme: f ist gleichmäßig stetig auf $(0,1)$.
Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$, denn für eine beliebige Nullfolge $x_n \to 0$ gilt: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge, denn: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und sei $\delta > 0$ aus der Definition von gleichmäßiger Stetigkeit, d.h.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - y| < \delta\ .$$

Da (x_n) eine Nullfolge ist, ist (x_n) auch eine Cauchyfolge und daher existiert zu obigem $\delta > 0$ Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ so dass

$$|x_n - x_m| < \delta\ .$$

Daher folgt dann

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon\ ,$$

und wir haben Cauchy-Konvergenz von $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nachgewiesen. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so dass $f(x_n) \to y$ in $\mathbb{R}$.
Offensichtlich existiert aber der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ nicht und wir haben einen Widerspruch zu obiger Annahme herausgearbeitet.

zu (ii): Beh.: f_n konvergiert punktweise und gleichmäßig gegen 0.
Beweis: Für $x = 0$ ist $f_n(0) = 0$ für alle n und für $x \in (0, 1]$ ist

$$f_n(x) = \frac{\frac{x}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + x^2} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \ .$$

Zur gleichmäßigen Konvergenz berechnen wir $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$. Da $f_n(x) \geq 0$ auf $[0, 1]$, genügt es, das Maximum zu finden, falls es existiert. Dazu berechnen wir:

$$f_n'(x) = \frac{(1 + n^2x^2) \cdot 1 - x \cdot 2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

und

$$f_n''(x) = \frac{(1 + n^2x^2)^2 \cdot (-2n^2x) - (1 - n^2x^2) \cdot 2(1 + n^2x^2) \cdot (2n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^4} \ .$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} f_n'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - n^2x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{n} \quad (\text{da} \ \ x \in [0, 1]) \ . \end{aligned}$$

Für dieses Extremum gilt $f_n''(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2} < 0$, also liegt bei $x = \frac{1}{n}$ ein Maximum von f vor. Das Supremum lautet daher $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$ und konvergiert daher unabhängig von x gegen 0. □

Aufgabe 3

(*i*) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} \frac{x^2-x}{x-1} & \text{für} \quad x \neq 1 \ , \\ 0 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

(*ii*) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \ , \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit.

zu (*i*): Beh.: f ist nicht stetig.
Beweis: Wir berechnen für $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{(x - 1)x}{x - 1} = x \ ,$$

also folgt

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ x\neq1}} f(x) = 1 \neq 0 = f(1) \ .$$

Daher ist f nicht stetig bei $x_0 = 1$.
zu (*ii*): Beh.: f ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$.
Beweis: Zunächst ist f differenzierbar für $x \neq 0$ nach den Differentierbarkeitsregeln mit

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x - \sin(x^2) \cdot 1}{x^2} \ .$$

Zur Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$ betrachten wir den Differentenquotienten

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{2x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \cos(2x) = 1\ ,$$

wobei hierbei einmal l'Hospital benutzt wurde. □

Aufgabe 4

(i) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar mit $f(a) \leq g(a)$ und

$$f'(t) \leq g'(t) \qquad \forall t \in (a,b)\ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung $f(t) \leq g(t)$ für alle $t \in [a,b]$.

(ii) Zeigen Sie die Ungleichung $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ für alle $x \geq 0$.

Beweis: zu (i): Nach Hauptsatz gilt für $t \in [a,b]$

$$f(t) \quad = \quad f(a) + \int_a^t f'(\tau)\, d\tau$$

und analog für g

$$g(t) \quad = \quad g(a) + \int_a^t g'(\tau)\, d\tau\ .$$

Mit den Voraussetzungen $f(a) \leq g(a)$ und $f'(\tau) \leq g'(\tau)$ und der Monotonie des Integrals folgt daher

$$f(a) + \int_a^t f'(\tau)\, d\tau \quad \leq \quad g(a) + \int_a^t g'(\tau)\, d\tau\ .$$

Mit obigen Formeln folgt daher

$$f(t) \quad \leq \quad g(t) \quad \text{für alle} \quad t \in [a,b]\ .$$

zu (ii): Setze $f(x) := 1 - \frac{x^2}{2}$ und $g(x) := \cos(x)$, jeweils auf $[0,\infty)$. Für die Ableitungen gilt

$$\begin{array}{lcl} f'(x) = -x & , & g'(x) = -\sin(x)\ , \\ f''(x) = -1 & , & g''(x) = -\cos(x)\ . \end{array}$$

Nun sieht man

$$\begin{array}{rcl} f(0) = 1 & \leq & 1 = g(0)\ , \\ f'(0) = 0 & \leq & 0 = g'(0)\ . \end{array}$$

Wegen $\cos(x) \leq 1$ folgt $-1 \leq -\cos(x)$, also

$$f''(x) \quad \leq \quad g''(x)\ .$$

Zweimalige Anwendung von (i) liefert nun die Behauptung. □

Name: . . . .

Fragen: jeweils mit Begründung beantworten, bzw. den Text richtig ergänzen
2 Punkte pro Frage
Sie dürfen auch zusätzliche Blätter verwenden

1.) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ die Ungleichung $n^2 > 2n + 1$.
Induktionsanfang $n = 3$: $3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{Ind.ann.}}{>} 2n + 1 + 2n + 1 = 2(n+1) + 2n > 2(n+1) + 1$, wobei hier $2n \geq 2 \cdot 3 = 6 > 1$ benutzt wurde.

2.) Ist die komplexe Folge $\left(e^{-n(1+i\frac{\pi}{2})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$?
Es gilt $\left|e^{-n(1+i\frac{\pi}{2})}\right| = e^{-n} \cdot \left|e^{-in\frac{\pi}{2}}\right| = e^{-n} \to 0$, also ist obige Folge eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ und daher auch eine Cauchyfolge.

3.) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^9 + 2x^5 - 1$ eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ hat.
Wir berechnen $f(0) = -1$ und $f(1) = 2$, also ist $f(0) < f(1)$ und daher existiert nach Zwischenwertsatz ein $\xi \in (0,1)$, so dass $f(\xi) = 0$.

4.) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x+1}{(n+x)^2}\, dx = 0$, denn:
$f_n(x) = \frac{x+1}{(n+x)^2}$ konvergiert wegen $|f_n(x)| \leq \frac{x+1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} \to 0$ gleichmäßig gegen 0 auf $[0,1]$. Daher darf man Limes und Integration vertauschen und erhält:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x+1}{(n+x)^2}\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{x+1}{(n+x)^2}\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0\,.$$

5.) Zeigen Sie die Ungleichung $\frac{e}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{x^2}\, dx$.
Nach verallgemeinertem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt für ein $\xi \in [1,2]$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{x^2}\, dx = e^{\xi^2} \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$$

und wegen $e^{\xi^2} \geq e^{1^2} = e$ auf $[1,2]$ und $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ folgt obige Abschätzung.

6.) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$.
Wir benutzen partielle Integration

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v} = [-\cos(x) \cdot \cos(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(x)) \cdot (-\sin(x))\, dx$$

$$= 1 - \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cdot \sin(x)\, dx\,.$$

Damit gilt $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

7.) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion $f(x) := \sqrt[3]{1+x}$ um $x_0 = 0$.
Wir schreiben $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ und berechnen $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{5}{3}}$.
Für das Taylorpolynom 2. Ordnung um 0, $T_2(f,x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$ gilt $T_2(f,x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$.