# Lösung zur 1. Klausur zur Analysis I

Marc Ensenbach

18. Januar 2002

**Aufgabe 1** (3+4+4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

---

(IA) $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = \frac{2^2 - 1 - 2}{2^1}$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für dieses $n$.
(IS) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^{n+1} - 2n - 2 \cdot 2 + n + 1}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{2^{(n+1)+1} - (n+1) - 2}{2^{n+1}},$$

was die Behauptung für $n + 1$ ist. Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

---

(IA) $n = 1$: $\sum_{k=1}^{2\cdot 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1+1}^{2\cdot 1} \frac{1}{k}$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für dieses $n$.

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} \overset{\text{(IV)}}{=} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=(n+1)+1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=(n+1)+1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=(n+1)+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k},\end{aligned}$$

was die Behauptung für $n+1$ ist. Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

---

(IA) $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 = 2\sqrt{1} - 1$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für dieses $n$.
(IS) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

der Induktionsschluss ist also gezeigt, wenn bewiesen wurde, dass dieser Ausdruck kleiner/gleich $2\sqrt{n+1} - 1$ ist:

$$\begin{aligned}&2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\sqrt{n+1} - 1 && \Leftrightarrow \\ &2\sqrt{n}\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} + 1 \leqslant 2(n+1) - \sqrt{n+1} && \Leftrightarrow \\ &2\sqrt{n(n+1)} + 1 \leqslant 2n + 2 && \Leftrightarrow \\ &2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2n + 1.\end{aligned}$$

Diese Aussage ist immer gültig, da $n(n+1) = n^2 + n \leqslant n^2 + n + \frac{1}{4} = (n + \frac{1}{2})^2$, also wegen der Monotonie der Wurzelfunktion $2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2(n + \frac{1}{2}) = 2n + 1$ gilt. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun die Behauptung.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $|x + y| \leqslant \max\{|x|, |y|\}$ genau dann, wenn $xy \leqslant 0$ gilt.

---

Es sei o. B. d. A. $x \geqslant 0$, ansonsten ersetze $x$ durch $-x$ und $y$ durch $-y$, ohne dass sich etwas an den zu betrachtenden Beträgen ändert.
1. Fall: $x = 0$. Dann ist $xy \leqslant 0$ und $|x+y| = |y| = \max\{|x|, |y|\}$.
2. Fall: $x > 0$ und $y > 0$. Dann ist $xy > 0$ und $|x+y| = x+y > \max\{x, y\} = \max\{|x|, |y|\}$.
3. Fall: $x > 0$ und $-x \leqslant y \leqslant 0$. Dann ist $xy \leqslant 0$ und $|x+y| = x - |y| \leqslant x = \max\{|x|, |y|\}$.
4. Fall: $x > 0$ und $y < -x$. Dann ist $xy \leqslant 0$ und $|x+y| = |y| - |x| \leqslant |y| = \max\{|x|, |y|\}$.
Mit dieser Fallunterscheidung ist die behauptete Äquivalenz bewiesen.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)
Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gilt $\operatorname{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ oder $|z| = 1$ ist.

---

Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}(z + \tfrac{1}{z}) = 0 &&\Leftrightarrow\\
&\operatorname{Im}(x + iy + \tfrac{1}{x+iy}) = 0 &&\Leftrightarrow\\
&\operatorname{Im}(x + iy + \tfrac{x-iy}{x^2+y^2}) = 0 &&\Leftrightarrow\\
&y - \tfrac{y}{x^2+y^2} = 0 &&\Leftrightarrow\\
&yx^2 + y^3 - y = 0 &&\Leftrightarrow\\
&y = 0 \ \vee\ x^2 + y^2 - 1 = 0 &&\Leftrightarrow\\
&\operatorname{Im} z = 0 \ \vee\ |z| = 1.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Sei $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie die inneren Punkte, die Häufungspunkte und die isolierten Punkte von $M$. Ist $M$ offen oder abgeschlossen?

---

Bestimmung der Häufungspunkte:
1. Fall: $x < 0$. Wähle $\varepsilon = |x| > 0$. Da alle Elemente von $M$ größer als 0 sind, liegen in $U_\varepsilon(x) = (2x, 0)$ keine Punkte aus $M$. Damit ist $x$ kein Häufungspunkt.
2. Fall: $x = 0$. Da $0 \neq \frac{1}{n} \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ist 0 ein Häufungspunkt von $M$.
3. Fall: $0 < x \leqslant 1$, $x = \frac{1}{n} \in M$. Wähle $\varepsilon = \min\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\} > 0$, dann ist $U_\varepsilon(x) \subset (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n-1})$. Da in $(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n-1})$ und damit auch in $U_\varepsilon(x)$ keine von $x$ verschiedenen Punkte aus $M$ liegen, ist $x$ kein Häufungspunkt von $M$.
4. Fall: $0 < x \leqslant 1$, $x \notin M$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$. Setze nun $\varepsilon = \min\{x - \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} - x\}$, was größer als 0 ist. Dann liegt in $U_\varepsilon(x)$ kein von $x$ verschiedener Punkt aus $M$, womit $x$ kein Häufungspunkt von $M$ ist.
5. Fall: $x > 1$. Wähle $\varepsilon = x - 1 > 0$. Da alle Elemente von $M$ kleiner/gleich 1 sind, liegen in $U_\varepsilon(x) = (1, 2x-1)$ keine Punkte aus $M$, womit $x$ kein Häufungspunkt von $M$ ist.
Man erhält damit insgesamt die Häufungspunktmenge $M' = \{0\}$. Da jeder innere Punkte von $M$ auch Häufungspunkt ist, kann höchstens 0 ein innerer Punkt von $M$ sein. Da aber $0 \notin M$ gilt, ist $\overset{\circ}{M} = \emptyset$. Für die Menge der isolierten Punkte erhält man dann $M \setminus M' = M$, also sind alle Punkte aus $M$ isoliert. Da $\overset{\circ}{M} \neq M$ gilt, ist $M$ nicht offen, wegen $M' \not\subset M$ ist $M$ nicht abgeschlossen.

**Aufgabe 5** (4+3 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Mengen auf Beschränktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum der Mengen.

a) $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$

Wegen $0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ und $0 \leqslant \frac{1+(-1)^n}{2n} \leqslant 1$ ist $M$ durch 0 und $\frac{3}{2}$ beschränkt.
Zeige $\inf M = 0$:
(1) 0 ist untere Schranke von $M$ nach Vorüberlegung.
(2) 0 ist größte untere Schranke: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$, dann ist $0 < \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ und

$$\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1+(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)} \in M,$$

also folgt aus (1) und (2) die Behauptung.
Zeige $\sup M = \frac{5}{6}$:
(1) $\frac{5}{6}$ ist obere Schranke von $M$: Ist $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2m+1} + \frac{1+(-1)^{2m}}{2(2m)} = \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m} \leqslant \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Ist $n = 2m-1$, $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2m-1+1} + \frac{1+(-1)^{2m-1}}{2(2m-1)} = \frac{1}{2m} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{5}{6}.$$

(2) $\frac{5}{6}$ ist kleinste obere Schranke: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2+1} + \frac{1+(-1)^2}{2 \cdot 2} \in M$, also ist keine kleinere obere Schranke möglich.
Damit folgt aus (1) und (2) die Behauptung.

b) $N = \left\{ x \in \ \middle|\, x = \binom{n}{k}, n, k \in \mathbb{N}, \frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n \right\}.$

Nach Vorlesung ist $N \subset \mathbb{N}$, also ist 1 eine untere Schranke. Wegen $1 = \binom{1}{1} \in N$ ist $\inf N = 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n = \binom{n}{1} \in N$, also ist $N$ nicht nach oben beschränkt, womit $\sup N = \infty$ gilt. (Bemerkung: Es ist $N = \mathbb{N}$.)

**Aufgabe 6** (4 Punkte)
Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n \geqslant 1}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv, so ist auch $(a_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ konvergent.

---

Es gelte $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und es sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Konvergenz findet man ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n'$. Setze $n_0 = \max \varphi^{-1}(\{1, 2, \ldots, n'-1\}) + 1$, dann gilt für alle $n \geqslant n_0$, da $\varphi$ injektiv ist, $\varphi(n) \geqslant n'$ und damit $|a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. Nach Definition gilt damit $a_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

**Aufgabe 7** (6+3+3+3 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

a) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n := \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
(Zeigen und benutzen Sie: Ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge positiver reeller Zahlen und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.)

Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Dann gilt

$$0 \leqslant |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leqslant \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

da $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ und damit $|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Damit folgt $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also $\sqrt{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{a}$.
Sei nun $(a_n)_{n\geqslant 1}$ die gegebene Folge. Dann gilt mit der eben gezeigten Aussage:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m}} = \sqrt{e},$$

da $((1+\frac{1}{2m})^{2m})_{m\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geqslant 1}$ ist.

b) $(b_n)_{n\geqslant 1}$ mit $b_n := \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wegen der Monotonie der $n$-ten Wurzel gilt

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \leqslant \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} \leqslant \sqrt[n]{7^n+7^n+7^n} = \sqrt[n]{3\cdot 7^n} = \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{7^n} = 7\cdot\sqrt[n]{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 7,$$

also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 7$ nach dem Sandwich-Lemma.

c) $(c_n)_{n\geqslant 1}$ mit $c_n := \frac{(n+2)!+in^2(n+3)!}{n(n+5)!}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$c_n = \frac{(n+2)!+in^2(n+3)!}{n(n+5)!} = \frac{1}{n(n+3)(n+4)(n+5)} + i\frac{n}{(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{1}{n(n+3)(n+4)(n+5)} + i\frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{4}{n})(1+\frac{5}{n})} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} 0.$$

d) $(d_n)_{n\geqslant 1}$ mit $d_n := \frac{\sqrt{5}n+(-1)^n n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$d_{2n} = \frac{\sqrt{5}(2n)+(-1)^{2n}(2n)}{2n+1} = \frac{2n(\sqrt{5}+1)}{2n+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} \sqrt{5}+1$$

und

$$d_{2n-1} = \frac{\sqrt{5}(2n-1) + (-1)^{2n-1}(2n-1)}{2n} = \frac{(2-\frac{1}{n})(\sqrt{5}-1)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} \sqrt{5}-1.$$

Damit hat $(d_n)_n$ zwei Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten und kann somit nicht konvergieren.

**Aufgabe 8** (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die durch $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = 2x_n - \frac{1}{3}x_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

---

(1) Beschränktheit: $0 < x_n \leqslant 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(IA) Es gilt $0 < x_1 = 1 \leqslant 3$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $0 < x_n \leqslant 3$ für dieses $n$.
(IS) Es ist $x_{n+1} \leqslant 3 \Leftrightarrow 2x_n - \frac{1}{3}x_n \leqslant 3 \Leftrightarrow -6x_n + x_n^2 \geqslant -9 \Leftrightarrow x_n^2 - 6x_n + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x_n-3)^2 \geqslant 0$, was immer gilt, also ist $x_{n+1} \leqslant 3$. Andererseits ist $x_{n+1} = 2x_n - \frac{1}{3}x_n^2 > 0 \overset{\text{(IV)} x_n>0}{\Leftrightarrow} 2 - \frac{1}{3}x_n > 0 \Leftrightarrow 2 > \frac{1}{3}x_n \Leftrightarrow 6 > x_n$, was nach (IV) immer gilt, also ist $x_{n+1} > 0$.
Nach dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
(2) Monotonie: $x_n \leqslant x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es gilt

$$x_n \leqslant x_{n+1} \overset{x_n\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2x_n - \frac{1}{3}x_n^2}{x_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{3}x_n \geqslant 1 \Leftrightarrow x_n \leqslant 3,$$

was nach Teil (1) gilt, also ist $(x_n)_{n\geqslant 1}$ monoton.
(3) Grenzwert: Nach (1) und (2) existiert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und es gilt $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_n - \frac{1}{3}x_n^2) \overset{\text{GWS}}{=} 2x - \frac{1}{3}x^2$. Löst man diese Gleichung, erhält man $x = 2x - \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$. Da der Grenzwert nicht 0 sein kann ($(x_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton steigend und es gilt $x_1 = 1$, also $x_n \geqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$), muss $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$ gelten.

**Aufgabe 9** (4+2 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sei definiert durch

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} + i^{2n+1}\frac{n-1}{n+2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

---

Es gilt

$$a_{2n} = \frac{2\sqrt{2n}}{2n+1} + i^{4n+1}\frac{2n-1}{2n+2} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{n}}}{2+\frac{1}{n}} + i\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS, A7a)}} i$$

und

$$a_{2n-1} = \frac{2\sqrt{2n-1}}{2n} + i^{4n-1}\frac{2n-2}{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - i\frac{2-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS, A7a)}} -i.$$

Sei nun $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Dann liegen unendliche viele gerade oder unendlich viele ungerade Zahlen in $(n_k)_{k\geqslant 1}$, also gibt es eine Teilfolge von $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$, die auch Teilfolge von $(a_{2n})_n$ bzw. $(a_{2n-1})_n$ ist und somit gegen $i$ oder $-i$ konvergiert. Da $(a_{n_k})_k$ nach Voraussetzung konvergent ist, muss $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} i$ oder $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} -i$ gelten, also gibt es außer $i$ und $-i$ keine weiteren Häufungspunkte.

b) Bestimmen Sie Limes inferior und Limes superior von $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\geqslant 1}$ sowie von $(\mathrm{Im}(a_n))_{n\geqslant 1}$.

---

Aus Teil a) erhält man über die Zerlegung in Real- und Imaginärteil $\{0\}$ als Häufungspunktmenge von $(\mathrm{Re}\, a_n)_{n\geqslant 1}$ und $\{-1,1\}$ als Häufungspunktmenge von $(\mathrm{Im}\, a_n)_{n\geqslant 1}$. Daraus liest man $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n = 0$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, a_n = -1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n = 1$ ab.

**Aufgabe 10** (6 Punkte)
Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergente reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie ohne Benutzung der Rechenregeln für Grenzwerte:

$(a_nb_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = ab$.

---

Da $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent und damit beschränkt sind, existieren $A, B \in (0;\infty)$ mit $|a_n| \leqslant A$ und $|b_n| \leqslant B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0$ so gewählt, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(A+B)}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(A+B)}$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt. Dann hat man für $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \leqslant A\frac{\varepsilon}{2(A+B)} + \frac{\varepsilon}{2(A+B)}B \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist $a_nb_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$ mit der Definition gezeigt.

**Aufgabe 11** (2+2+2 Punkte)

a) Geben Sie eine exakte Formulierung der Definition der Konvergenz einer komplexen Folge an.

---

Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$.

b) Geben Sie eine exakte Formulierung des Sandwich-Lemmas an.

---

Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ und $(c_n)_{n\geqslant 1}$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = G$. Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ für alle $n \geqslant n_0$, so ist auch $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = G$.

c) Sei $M \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen dazu an, dass $x$ Häufungspunkt von $M$ ist.

---

Es sind äquivalent:
(i) $x$ ist ein Häufungspunkt von $M$.
(ii) In jeder Umgebung von $x$ liegen unendlich viele Punkte von $M$.
(iii) In jeder Umgebung von $x$ liegt ein von $x$ verschiedener Punkt aus $M$.
(iv) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $(M \setminus \{x\}) \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.