Mathematisches Institut
Universität München
Prof. Heinrich Steinlein
Thomas Vogel

Analysis I (MIA) im SS 07

2. Klausur

14. Juli 2007, 10-12 Uhr

Hinweise :

1. Schreiben Sie auf **jedes** Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen **in Druckschrift**. Füllen Sie das Scheinformular auf der nächsten Seite aus.
2. Bearbeiten Sie verschiedene Aufgaben auf verschiedenen Blättern. Wenn Sie mehr Papier brauchen, dann melden Sie sich bitte.
3. Auf jede Aufgabe gibt es 10 Punkte.

Viel Erfolg!

Name : ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

Name:..

Aufgabe 1: Es sei $(a_n) = \big((-1)^{n+1} + 2^{-n}\big)$. Man zeige

a) 1 ist ein Häufungspunkt von (a_n).

b) Kein $a > 1$ ist Häufungspunkt von (a_n).

c) Was folgt aus a) und b) für $\limsup(a_n)$?

Lösung:

a) Wir betrachten $a_{2n-1} = \big(1 + 2^{-2n+1}\big)$. Wegen $\lim_{n\to\infty} 2^{-2n+1} = 0$ konvergiert die Teilfolge $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ von (a_n) gegen 1. Also ist 1 ein Häufungspunkt von (a_n).

b) Sei $a > 1$ und $\varepsilon := (a-1)/2$. Wegen

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= (-1)^{n+1} - 1 + 2^{-n} \\ &\leq 2^{-n} \end{aligned}$$

und weil $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 1 + \varepsilon$. Wegen der Wahl von ε ist $a > 1$ kein Häufungspunkt von (a_n).

c) Es folgt $\limsup(a_n) = 1$, denn $1 = \max\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$, vgl III.2.9.

Name:...

Aufgabe 2: Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{(3+(-1)^j)^j}$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{\binom{j+2}{3}}$

c) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{j^2}{\binom{j+2}{3}}$

Lösung:

a) Wir wenden das Wurzelkriterium an. Wir berechnen

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{(3+(-1)^n)^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3+(-1)^n} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3+(-1)^n}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (aus der Vorlesung) folgt

$$\limsup \left(\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{(3+(-1)^n)^n}\right|}\right) = \frac{1}{\liminf(3+(-1)^n)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Die Reihe konvergiert also nach dem Wurzelkriterium.

b) Es gilt für $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{j^2}{\binom{j+2}{3}} = \frac{6j^2}{(j+2)(j+1)j} = \frac{6j}{(j+2)(j+1)} \geq \frac{6j}{3j\cdot 2j} = \frac{1}{j}.$$

Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ ist divergent, nach dem Vergleichskriterium ist also auch $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{\binom{j+2}{3}}$ divergent.

c) Das Vorzeichen der Summanden in der Reihe alterniert. Ausserdem gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{(j+1)^2}{\binom{(j+1)+2}{3}}}{\frac{j^2}{\binom{j+2}{3}}} &= \frac{(j+1)^2}{j^2} \cdot \frac{3!j(j+1)(j+2)}{3!(j+1)(j+2)(j+3)} \\
&= \frac{(j+1)^2}{j(j+3)} \\
&= \frac{j^2+2j+1}{j^2+2j+j} \\
&\leq 1.
\end{aligned}
$$

Also ist die Folge der Batraege der Koeffizienten der Reihe monoton fallend. Wegen

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{j^2}{\binom{j+2}{3}} \right| &= \frac{6}{(1+2/j)(j+1)} \\
&\leq \frac{2}{j}
\end{aligned}
$$

ist die Koeffizientenfolge eine Nullfolge. Die Reihe konvergiert also nach dem Leibnizkriterium.

Name:...

Aufgabe 3: Man beweise: Die Menge der Dezimalbrüche

$$M := \{0, a_1a_2 \ldots \mid a_1, a_2, \ldots \in \{0, 5\}\}$$

ist überabzählbar.

Lösung : Aus II.4.2. folgt, dass verschiedene Dezimalbrüche aus M auch verschiedene reelle Zahlen darstellen.

Angenommen M ist abzählbar. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass jeder Dezimalbruch aus M genau einmal in der Folge vorkommt. Wir schreiben

$$x_n = 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \ldots .$$

Wir setzen $\hat{a}_i := 5 - a_i^{(i)}$ und betrachten den Dezimalbruch

$$\hat{x} = 0, \hat{a}_1\hat{a}_2 \ldots \in M.$$

Nach der Annahme gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_N = \hat{x}$. Diese beiden Dezimalbrüche stimmen aber an der N-ten Stelle nach dem Komma nicht überein repräsentieren also verschiedene reelle Zahlen.

Name: ....

Aufgabe 4: Sei $c > 1$. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^j+1}$ gleichmäßig auf $[c, \infty[\subset \mathbb{R}$ konvergiert. Man folgere daraus die lokal gleichmäßige Konvergenz auf $]1, \infty[$.

Lösung: Wir benutzen das Weierstraßkriterium (II.5.4). Für alle $x \in [c, \infty[$ und $j \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x^j+1}\right| &< \frac{1}{x^j} \\ &< c^{-j}. \end{aligned}$$

Wegen $c > 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} c^{-j}$. Nach dem Weierstraßkriterium konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^j+1}$ gleichmäßig auf $]c, \infty[$.

Sei nun $x \in]1, \infty[$ und $r = \frac{x-1}{2} > 0$. Dann liegt der Ball $K_r(x)$ in $[1+r, \infty[$. Auf letzterem Intervall konvergiert die Reihe gleichmäßig, also auch auf $K_r(x)$. Also ist die Reihe lokal gleichmäßig konvergent auf $]1, \infty[$.

Name: ....

Aufgabe 5:

a) Sei $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ eine Reihe mit Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}^+$. Zeige, dass ρ^2 der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 z^j$ ist.

b) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!}.$$

Beweise, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $K_1(0) \subset \mathbb{C}$ konvergiert.

Lösung :

a) Nach dem Satz von Cauchy-Hadamard gilt

$$\rho^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann gilt aber auch $\rho^{-2} = \limsup \sqrt[n]{|a_n^2|}$. Wieder nach dem Satz von Cauchy-Hadamard ist der Konvergenzradius von $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 z^j$ also ρ^2.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| &= \frac{n!|z|}{(n+1)!}\cdot\left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)}\right| \\ &= \frac{n+1/2}{n+1}|z|.\end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| < 1$. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

Name: ....

Aufgabe 6: Es sei

$$\begin{aligned} M :=&]0,2]\times]0,2] \\ =& \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 \le 2 \text{ und } 0 < x_2 \le 2\}. \end{aligned}$$

Man zeige:

a) $(0,1) \in \overline{M}$

b) $(1,1) \in \mathring{M}$

Lösung :

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1/n, 1) \in \mathbb{R}^2$ liegt in M und konvergiert gegen $(0,1)$. Also $(0,1) \in \overline{M}$.

b) Der Ball $K_1((1,1))$ liegt ganz in M, denn falls $(x,y) \in K_1((1,1))$ und $(x,y) \notin M$ würde gelten

$$\begin{aligned} &|x-1| \ge 1 \\ \text{oder } &|y-1| \ge 1. \end{aligned}$$

Dann erhält man den Widerspruch $1 > |(x,y)-(1,1)|$ (weil (x,y) im 1–Ball um $(1,1)$ liegt) und $|(x,y)-(1,1)| \ge 1$.

Also liegt ein offener Ball um $(1,1)$ ganz in M, das bedeutet insbesondere $(1,1) \in \mathring{M}$