Musterlösungen zur Klausur Analysis 1

Aufgabe 1 (3 + 4 Punkte)**.** *Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch*

$$a_1 := 0 \text{ und } a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}.$$

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt und berechnen Sie a.

Lösung:

a) **Behauptung:** $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Durch vollständige Induktion
Induktionsanfang: $n = 1$: $\quad 0 = a_1 \leq a_2 = \frac{1}{2}$
Induktionsschritt: Es gelte $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 2 \leq 2 + a_n \leq 2 + a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+a_n} \geq \frac{1}{2+a_{n+1}}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = 1 - \frac{1}{2+a_{n+1}} > \underbrace{1 - \frac{1}{2+a_n}}_{=a_{n+1}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

also $a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq 0$. □

b) Nach a) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, außerdem ist

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+a_n} \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 1 nach oben beschränkt ist. Daher existiert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Aus

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+a_n}$$

folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$

$$a = 1 - \frac{1}{2+a} \Longleftrightarrow 2a + a^2 = 2 + a - 1 = 1 + a \Longleftrightarrow a^2 + a - 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Da $a \geq 0$, muss

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

gelten.

Aufgabe 2 (3 + 4 Punkte)**.** *Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sqrt[k]{3}-1).$$

Lösung: Sei $a_n := \sqrt[n]{3}-1$. Wir verwenden das Leibnizkriterium, um die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ zu beweisen. Da $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, folgt $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Außerdem ist

$$1 \le 3^{\frac{1}{n+1}} \le 3^{\frac{1}{n}}$$

und daher $0 \le a_{n+1} \le a_n$.
Behauptung: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\sqrt[k]{3}-1\right)$ konvergiert nicht absolut.
Begründung: Zunächst ist

$$\left|(-1)^{k+1}\left(\sqrt[k]{3}-1\right)\right| = \sqrt[k]{3}-1.$$

Außerdem

$$3^{\frac{1}{k}}-1 \ge \frac{1}{k} \Longleftrightarrow 3^{\frac{1}{k}} \ge 1+\frac{1}{k} \Longleftrightarrow 3 \ge \left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Da $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e < 3$, ist letztere Ungleichung sicher für $k \ge k_0$ richtig, sodass $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{3}-1\right)$ nach dem Minorantenkriterium durch Vergleich mit der harmonischen Reihe divergiert. $\square$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = \dfrac{4\,\mathrm{i}-2}{3-\mathrm{i}}$.*

Lösung:
Es gilt

$$\frac{4\,\mathrm{i}-2}{3-\mathrm{i}} = \frac{(4\,\mathrm{i}-2)(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \frac{12\,\mathrm{i}-4-6-2\,\mathrm{i}}{10} = -1+\mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi\,\mathrm{i}}.$$

Laut Vorlesung sind dann die Lösungen der Gleichung

$$z^2 = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi\,\mathrm{i}}$$

gegeben durch

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{3}{8}\pi\,\mathrm{i}} \text{ und } z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{11}{8}\pi\,\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Beweisen Sie, dass* $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x = 1$.

Beweis. Es gilt

$$x^x = e^{x \log x}, \qquad x > 0.$$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Da

$$\lim_{x \searrow 0} x \log x = 0 \qquad \text{(Vorlesung)}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \log a_n = 0.$$

Da $x \mapsto e^x$ stetig ist, erhält man

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{a_n \log a_n} = e^0 = 1.$$

□

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** *Zeigen Sie, dass die Funktion* $f(x) := \sin(x) - e^{-x}$ *im Intervall* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *genau eine Nullstelle besitzt.*

Beweis. Es gilt $f(0) = \sin(0) - e^0 = 0 - 1 = -1 < 0$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} > 0, \text{ da } e^{-\frac{\pi}{2}} < 1.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt daher die Existenz einer Nullstelle von f. Zum Nachweis der Eindeutigkeit zeigen wir, dass f in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wächst: Es gilt

$$f'(x) = \cos(x) + e^{-x} \geq e^{-x} > 0 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Daraus folgt, dass f streng monoton wachsend in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (Satz aus Vorlesung) ist. □

Aufgabe 6 $(4+4$ Punkte$)$**.** *Betrachten Sie die Funktion* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) := \sqrt{x} \cdot \log\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und lokalen Extrema von f.

b) Untersuchen Sie, ob $\sup\limits_{x\in(0,\infty)} f(x)$ bzw. $\inf\limits_{x\in(0,\infty)} f(x)$ existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

Lösung:

a) *Nullstellen von f*: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\sqrt{x}\log(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, da $\sqrt{x} > 0$ für $x > 0$.
lokale Extrema von f:

$$f'(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}\log x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\log x - \sqrt{x}\frac{1}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}(\log x + 2),$$

also

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}.$$

$$f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}^3}(\log x + 2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{e^3}{2} < 0.$$

Also ist $\frac{1}{e^2}$ lokales Maximum.

b) Da $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}(\log x + 2)$, ist $f'(x) > 0$ für $0 < x < \frac{1}{e^2}$, $f'(x) < 0$ für $x > \frac{1}{e^2}$. Also wächst f streng monoton auf $\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$ und fällt streng monoton auf $\left[\frac{1}{e^2}, \infty\right)$. Also

$$\sup_{x\in(0,\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2}{e}.$$

Da außerdem $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\log(x) = \infty$, ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, sodass f nicht nach unten beschränkt ist.