Prof. Dr. Moritz Kaßmann
Fakultät für Mathematik
Wintersemester 2014/2015

Universität Bielefeld

Klausur (Probeklausur) *Analysis I (240003)*

2. Termin: 25. März 2015

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Beweisen Sie, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gilt:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}\,. \tag{1}$$

Lösungsvorschlag: Wir definieren für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ die Behauptung $A(n)$ wie folgt:

$$A(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

<u>Induktionsanfang</u> ($n_0 = 2$):

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 \iff 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} > 2 \iff \sqrt{2} > \frac{1}{2}. \quad \checkmark$$

<u>Induktionsschritt</u>: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Wir nehmen an, die Behauptung $A(n)$ sei wahr. Dann müssen wir zeigen, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{\text{IV}}{>} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Folglich ist es ausreichend $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$ zu zeigen. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \\ \iff & n + \frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n+1} > n+1. \end{aligned}$$

Diese Aussage ist wahr, denn $\frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{n+1}} > 1$ und $\frac{1}{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (6+6+6 Punkte)

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}$. Definieren Sie das Supremum von M.

(b) Geben Sie zwei Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$ an, welche disjunkt sind und für welche gilt:

$$\sup(M_1) = \sup(M_2), \qquad \inf(M_1) = \inf(M_2)\,.$$

(c) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, welche beschränkt ist und monoton wächst. Beweisen Sie, dass (a_n) damit auch konvergent ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ein Element $a \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \leq a$. Das Supremum einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist ein Element $s \in \mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften

1. s ist obere Schranke von M
2. Falls s' eine obere Schranke von M ist, so gilt $s \leq s'$.

(b) Seien $M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ und $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$. Dann gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Des Weiteren gilt: $\sup(M_1) = \sup(M_2) = 1$ und $\inf(M_1) = \inf(M_2) = 0$.

(c) Wir definieren die Menge $A = \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Da laut Voraussetzung (a_n) nach oben beschränkt ist, besitzt die Menge A ein Supremum $a \in \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert aufgrund der Supremumseigenschaft ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a,$$

andernfalls wäre a nicht die kleinste obere Schranke von a. Da (a_n) monoton wachsend ist, gilt damit für alle $n \geq n_0$

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a,$$

also $a - a_n = |a_n - a| < \varepsilon$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) = f(x) \neq 0, \quad f''(x) = 2f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,?$$

Entscheiden Sie durch ja/nein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Lösungsvorschlag: Nein, eine solche Funktion gibt es nicht. Für zwei Funktionen f, g mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also

$$f'(x) = f(x) \implies f''(x) = f'(x).$$

Da laut Voraussetzung $f(x) = f'(x)$ folgt also $f''(x) = f(x)$, was ein Widerspruch zu $f''(x) = 2f(x)$ ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergiert, und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+4k}{3k^3-6}\,.$$

Lösungsvorschlag: Die Reihe ist konvergent. Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ beliebig. Dann gilt

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1+4k}{3k^3-6} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{k+4k}{3k^3-6} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{5k}{2k^3} = \frac{5}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Folglich konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium, da $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Aufgabe 5 (4+4 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, welche die Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad 2z^2 - 4z + 4 = 0\,, \\ &\text{(b)} \quad z^3 + z^2 - z \;\; = 0\,. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt mit der pq-Formel:

$$\begin{aligned}2z^2 - 4z + 4 = 0 &\iff z^2 - 2z + 2 = 0\\ &\implies z = 1 + \sqrt{1-2} = 1 + i \quad \text{oder } z = 1 - \sqrt{1-2} = 1 - i.\end{aligned}$$

Somit lösen $z = 1 + i$ und $z = 1 - i$ die Gleichung $2z^2 - 4z + 4 = 0$.

(b) Es gilt: $z^3 + z^2 - z = z(z^2 + z - 1) = 0$. Also ist $z = 0$ eine Lösung der Gleichung. Des Weiteren gilt mit der pq-Formel:

$$z^2 + z - 1 = 0 \iff z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oder} \quad z = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Also sind $z = 0$, $z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $z = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ Lösungen der Gleichung $z^3 + z^2 - z = 0$.

Aufgabe 6 (4+4 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}\,, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

Lösungsvorschlag:

(a) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 8x + 15$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$. Da f und g differenzierbare Funktionen sind, ist der Satz von L'Hospital anwendbar und es gilt:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x\to 3} \frac{2x - 5}{2x - 8} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)^{20}(1-\frac{3}{2x})^{20}(3x)^{30}(1+\frac{2}{3x})^{30}}{(2x)^{50}(1+\frac{1}{2x})^{50}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{30} \frac{(1-\frac{3}{2x})^{20}(1+\frac{2}{3x})^{30}}{(1+\frac{1}{2x})^{50}} \right)\\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{30} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(1-\frac{3}{2x})^{20}(1+\frac{2}{3x})^{30}}{(1+\frac{1}{2x})^{50}} \right)\\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (6 + 6 Punkte)
Im Folgenden sind Funktionen des Typs $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben. Geben Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich I an und berechnen Sie die Ableitung f'.

$$\begin{aligned}&\text{(a)} \ f(x) = \sin(\ln(x))\,,\\ &\text{(b)} \ f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\,,\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

(a) Die Sinusfunktion ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Da die Logarithmusfunktion nur auf $(0, \infty)$ definiert ist, ist der maximale Definitionsbereich der Funktion f gegeben durch $I = (0, \infty)$. Nach der Kettenregel gilt für $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}.$$

(b) Die Wurzelfunktion ist eine auf $[0, \infty)$ definierte Funktion. Es gilt $x^2 - 1 \geq 0 \iff |x| \geq 1$. Des Weiteren ist der Nenner $x \mapsto x^2 - 1$ genau dann Null, wenn $|x| = 1$. Folglich ist der maximale Definitionsbereich gegeben durch: $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$. Für alle $x \in I$ können wir f wie folgt umschreiben:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nach der Ketten- und Quotientenregel gilt für $|x| > 1$:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x}{x^2 - 1} = \frac{-x}{(x^2 - 1)^{3/2}}.$$

Aufgabe 8 (2+4+2+4+4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

a) Bestimmen Sie, falls gegeben, die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.

b) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie das Verhalten des Graphen für $x \to \pm\infty$.

d) Bestimmen Sie lokale und globale Extrema von f.

e) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt:

$$f(x) = 0 \iff x^2 e^{-\frac{x}{2}} = 0 \iff x = 0.$$

Folglich schneidet der Funktionsgraph von f die Koordinatenachsen nur im Ursprung $(0, 0)$.

b) Es gilt nach der Ketten- und Produktregel:

$$f'(x) = 2xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right),$$
$$f''(x) = e^{-\frac{x}{2}} (-x + 2) - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 \right).$$

c) Für die Grenzwerte gilt:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-\frac{x}{2}} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-\frac{x}{2}} \right) = +\infty.$$

d) Wir bestimmen zunächst alle kritischen Punkte:

$$f'(x) = 0 \iff \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ oder } 2 - \frac{1}{2}x = 0\right) \iff (x = 0 \text{ oder } x = 4.)\,.$$

An der Stelle $x = 0$ liegt ein lokales Minimum vor, denn

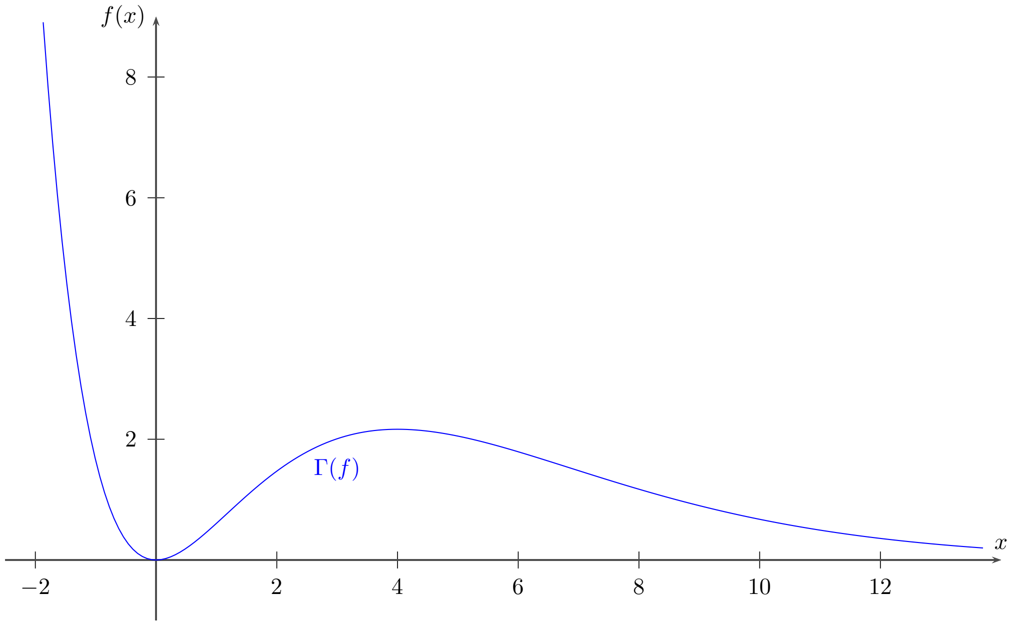
$$f''(0) = 1 \cdot 2 = 2 > 0$$

und an der Stelle $x = 4$ liegt ein lokales Maximum vor wegen

$$f''(4) = e^{-2}\,(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0.$$

Da die Funktion f nichtnegativ ist, d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, liegt an der Stelle $x = 0$ sogar ein globales Minimum vor.
Allerdings existiert kein globales Maximum, da nach Aufgabenteil (c) gilt: $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$.

e)



Aufgabe 9 (6+6+6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_2^3 \frac{x^2 + 7x - 1}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{(b)} \int_0^1 x \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{(c)} \int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt:

$$\int_2^3 \frac{x^2+7x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 x+7-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2+7x-\ln(x)\right)\Big|_2^3 = \frac{19}{2}-\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 9,09.$$

(b) Die Substitution $z = x^2$ liefert

$$\int_0^1 x\exp(-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \exp(-z)\,dz = \frac{1}{2}\left(-\exp(-z)\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}(1-\exp(-1)).$$

(c) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\cos(x)\,dx &= \Big[\cos^2(x)\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\,dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Äquivalenzumformung ergibt nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx = \frac{2}{3}\Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$