Prof. Dr. M. Röger
Dipl.-Math. C. Zwilling

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

Musterlösung der 1. Klausur zur Vorlesung „Analysis I“ (24.02.2016)

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 1. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) \neq 0$. Der Beweis erfolgt per Induktion über n:
Induktionsanfang: Nach dem Additionstheorem für Sinus gilt

$$\begin{aligned} & \sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x) \\ \overset{\sin(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad & \cos(2^0 x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)} \end{aligned}$$

also die Behauptung für $n = 1$. ✓
Induktionsschluss: Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\text{(IV)} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}.$$

Dann gilt wieder mit dem Additionstheorem für Sinus

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x)\right) \cdot \cos(2^n x) \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)} \cdot \cos(2^n x) \\ &= \frac{1}{2^n \sin(x)} \sin(2^n x)\cos(2^n x) \\ &= \frac{1}{2^n \sin(x)} \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 2^n x) \\ &= \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \sin(x)} \checkmark \end{aligned}$$

Mit dem Induktionsprinzip folgt dann die Behauptung.

Aufgabe 2. (1) Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $C > 0$ einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_k > C$ für alle $k \geq k_0$.

(2) Sei $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und damit nach unten beschränkt, denn es gilt $a_k \geq a_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung unbeschränkt, also nach oben unbeschränkt, und somit existiert nach Definition ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{k_0} > C$.
Da die Folge monoton wachsend ist, gilt dann für alle $k \geq k_0$

$$a_k \geq a_{k_0} > C,$$

also die Behauptung.

Aufgabe 3. (1) Es gilt

$$a_k = \frac{k^2+7k-3}{13k+5} = \frac{k+7-\frac{3}{k}}{13+\frac{5}{k}} \longrightarrow \infty \quad \text{für } k \to \infty.$$

Damit ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(2) Es gilt

$$b_k = \frac{k\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{k-\cos k\pi} = \begin{cases} \frac{k}{k-1} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{-k}{k+1} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} 1+\frac{1}{k-1} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1+\frac{1}{k+1} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Damit ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und es ist $-1 \le b_k \le 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Folglich ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht bestimmt divergent und Limes superior und inferior existieren. Man hat

$$\limsup_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} b_{2k} = 1$$

sowie

$$\limsup_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = -1.$$

Limes superior und inferior stimmen nicht überein und somit ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

Aufgabe 4. Der Nachweis der Konvergenz erfolgt mit dem Wurzelkriterium.
Wegen $\exp(k) = e^k$ gilt

$$\sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^k k^2}{e^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{k^2}}{\sqrt[k]{e^k}} = \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Damit ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent, also auch konvergent.

Aufgabe 5. Nach Voraussetzung existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$(*) \qquad |h(r)-h(0)| = |h(r)| < \varepsilon \quad \text{für alle } r \text{ mit } |r-0| = |r| < \delta.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle dann δ wie in $(*)$. Dann gilt für alle $x, y \in (a,b)$ mit $|x-y| < \delta$

$$|f(x)-f(y)| \le h(|x-y|) \overset{(*)}{<} \varepsilon,$$

und damit die gleichmäßige Stetigkeit von f. (2 der zu erreichenden Punkte werden hier für die richtige Formulierung oder Anwendung der Definition von gleichmäßiger Stetigkeit vergeben).

Aufgabe 6. Die Funktion f ist genau dann streng monoton wachsend auf $[a, b]$, wenn

$$f(x) < f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in [a, b] \text{ mit } x < y.$$

Seien also $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$.
Dann existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in (x, y) \subset (a, b)$ mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(y - x)}_{>0} > 0.$$

Es gilt also $f(y) > f(x)$ und damit ist f streng monoton wachsend.

Aufgabe 7. Auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist f differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen. Nach der Ketten- und Produktregel gilt für $x \neq 0$ dann

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

In 0 betrachtet man den Differenzenquotienten von f. Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Also ist f auch in $x = 0$ differenzierbar und man hat insgesamt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 8. (1) Nach der aus der Vorlesung/Übung bekannten Restgliedabschätzung für die Exponentialreihe gilt

$$|\exp(1) - 1| \leq 2\frac{1}{1!} = 2,$$

also die obere Schranke

$$e \leq 3.$$

Für die untere Schranke nutzt man direkt die Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k!} \geq 1 + 1 = 2.$$

(2) Mit der Substitution $x = e^{-y}$ erhält man

$$\lim_{x\searrow 0}|x\log(x)| = \lim_{y\to\infty}\left|\frac{y}{e^y}\right| = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}.$$

Wegen

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!} > \frac{y^2}{2} \qquad \text{für alle } y > 0$$

gilt dann

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}\leq\lim_{y\to\infty}\frac{2y}{y^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{2}{y}=0.$$

Das beweist die Behauptung.

Aufgabe 9. f ist eine Komposition differenzierbarer Funktionen und damit differenzierbar. Um die Extremalstellen der Funktion zu finden genügt es daher, alle Stellen mit $f'(x)=0$ zu betrachten. Man hat

$$f'(x)=4+4\log(x)\stackrel{!}{=}0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=e^{-1}.$$

Die zweite Ableitung von f ist gegeben durch

$$f''(x)=\frac{4}{x},\qquad \text{also ist} f''(e^{-1})=4e>0.$$

Folglich besitzt f ein lokales Minimum in $x_0=e^{-1}$ und ist streng monoton fallend in $(0,e^{-1}]$ und streng monoton wachsend in $[e^{-1},\infty)$. Es gilt außerdem

$$f(x_0)=4\frac{-1}{e}+1<0$$

wegen Aufgabe 8(1).
Eine Betrachtung der Grenzwerte von f an den Rändern des Definitionsbereichs liefert

$$\lim_{x\searrow 0}f(x)=0+1=1>0 \qquad \text{wegen Aufgabe 8(2)}$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

Somit ist f an den Rändern des Definitionsbereichs positiv und bei $x_0=e^{-1}$ negativ.
Da f differenzierbar und somit stetig ist, existieren nach dem Zwischenwertsatz daher Zwischenstellen $\xi_1\in(0,e^{-1})$, $\xi_2\in(e^{-1},\infty)$ mit $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. Andere Nullstellen können wegen des Monotonieverhaltens von f nicht existieren und damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 10. (1) Das Oberintegral von f ist definiert durch

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \,:\, \psi\in T[a,b],\, \psi\geq f \text{ auf } [a,b]\right\},$$

das Unterintegral von f ist definiert durch

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \,:\, \varphi\in T[a,b],\, \varphi\leq f \text{ auf } [a,b]\right\}.$$

(2) f heißt integrierbar, falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) Möglich ist hier jede nicht konstante Treppenfunktion, nehme zum Beispiel $[a, b] = [0, 2]$ und

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{für } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Dann ist f nach Definition integrierbar, aber in 1 offensichtlich unstetig.

Aufgabe 11 (*)**.** Angenommen, es existiert eine differenzierbare Funktion $H : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $H' = h$. Dann ist H insbesondere stetig.
Für $x \in (-1, 0)$ gilt $h'(x) = -1$, also nach dem Hauptsatz

$$H(x) = -x + C_1 \qquad \text{für ein } C_1 \in \mathbb{R}.$$

Für $x \in (0, 1)$ gilt $h'(x) = 1$, also

$$H(x) = x + C_2 \qquad \text{für ein } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Da H stetig ist, müssen rechts- und linksseitiger Limes in 0 übereinstimmen und man erhält $C_1 = C_2$ und damit

$$H(x) = \begin{cases} -x + C_1 & x \in (-1, 0], \\ x + C_1 & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Nun ist H in 0 aber nicht differenzierbar, denn

$$-1 = \lim_{x \nearrow 0} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \searrow 0} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = 1.$$

Dies ist ein Widerspruch zur angenommenen Differenzierbarkeit von H.