Prof. Dr. M. Röger　　　　　　　　　　　　　　Fakultät für Mathematik

Klausur Analysis I

24.02.2016

Die Klausur ist mit 37 Punkten bestanden.

Aufgabe 1:[10 Punkte] Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) \neq 0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}.$$

Aufgabe 2:[8 Punkte]

(1) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Definieren Sie: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(2) Sei nun $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und monoton wachsend. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 3:[10 Punkte] Betrachten Sie die Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_k := \frac{k^2 + 7k - 3}{13k + 5},\ k \in \mathbb{N}, \qquad b_k := \frac{k \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{k - \cos(k\pi)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie diese Folgen jeweils auf Beschränktheit, Konvergenz und bestimmte Divergenz. Falls die betreffende Folge beschränkt ist, bestimmen Sie Limes superior, Limes inferior und gegebenenfalls den Grenzwert für $k \to \infty$.

Aufgabe 4:[6 Punkte] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{\exp(k)}.$$

Hinweis: Sie dürfen die Ergebnisse der anderen Aufgaben verwenden.

Aufgabe 5:[8 Punkte] Sei $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h(0) = 0$. Sei weiter $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq h(|x - y|) \qquad \text{für alle } x, y \in (a, b).$$

Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 6:[6 Punkte] Gelte $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei f differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass f strikt monoton wachsend ist auf $[a, b]$.

Aufgabe 7:[6 Punkte] Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie (mit Begründung) alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

Aufgabe 8:[6 Punkte]

(1) Zeigen Sie: $2 \leq e \leq 3$, wobei $e = \exp(1)$ die Eulersche Zahl bezeichne.
(2) Zeigen Sie: $\lim\limits_{x \searrow 0} x \log(x) = 0$.

Aufgabe 9:[8 Punkte] Betrachten Sie die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := 4x \log(x) + 1, \qquad x \in (0, \infty).$$

Berechnen Sie alle lokalen Extrema von f und zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.
Hinweis: Sie dürfen alle Ergebnisse der vorangegangenen Aufgaben benutzen.

Aufgabe 10:[6 Punkte] Sei $a < b$ und bezeichne $T[a, b]$ den Raum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(1) Geben Sie die Definition des Ober- und Unterintegrals von f an.
(2) Definieren Sie: f ist (Riemann-)integrierbar.
(3) Geben Sie eine Funktion an, die integrierbar aber nicht stetig ist.

***Aufgabe 11:**[6 Bonuspunkte] Sei $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt keine differenzierbare Funktion $H : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $H'(x) = h(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$.