Musterlösungen zur Klausur Analysis I

1. **Vollständige Induktion**
   Man beweise durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Beweis: Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Die Aussage gilt für $n = 1$, denn für $n = 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 \quad \text{und} \quad \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1.$$

Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $n = k \in \mathbb{N}$ richtig ist, dass also

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

gilt. Unter dieser Annahme folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \left(\sum_{i=1}^{k} i^3\right) + (k+1)^3 \\
&= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 \\
&= \left[\frac{(k+1)}{2}\right]^2 \left\{k^2 + 4(k+1)\right\} \\
&= \left[\frac{(k+1)}{2}\right]^2 (k+2)^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

Also gilt die Aussage auch für $n = k + 1$.

2. **Grenzwerte**

   (a) Wie lautet der Grenzwert x der Folge $(x_n)_{n\geq 2}$, wenn

$$x_n = \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}?$$

   (b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe man eine Indexschranke $n_0(\varepsilon)$ an, so dass für alle $n > n_0(\varepsilon) : |x_n - x| < \varepsilon$.

Lösung:

(a) Aus den Gesetzen für das Rechnen mit Grenzwerten folgt:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}{\frac{1}{\sqrt{n}}-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}+1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

(b) Wir suchen eine Indexschranke, so dass

$$|x_n - x| = \left|\frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}} + 1\right| = \left|\frac{1+\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}\right| = \frac{2}{\sqrt{n}-1} < \varepsilon.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\sqrt{n} - 1 > \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad n > \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^2$$

gilt. Eine mögliche Indexschranke ist somit

$$n_0(\varepsilon) := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^2.$$

3. **Vollständigkeit von metrischen Räumen**

(a) Wann heißt eine Folge im metrischen Raum (E, d) *Cauchyfolge* ?

(b) Wann heißt ein metrischer Raum *vollständig* ?

(c) In (E, d) mit $E := (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x-y|$ betrachten wir die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{3n}$. Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in (E, d)?

(d) Warum ist (E, d) nicht vollständig?

Lösung:

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt im metrischen Raum (E, d) *Cauchyfolge*, wenn es zu jeder Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ eine Indexschranke $n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $m, n > n_0(\varepsilon)$ die Beziehung $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ gilt.

(b) Ein metrischer Raum (E, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert.

(c) <u>Variante 1:</u> Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $m \geq n$ annehmen. Dann gilt

$$d(x_m, x_n) = \left|\frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{3n}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{3n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{3\varepsilon} =: n_0(\varepsilon),$$

also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $m, n > n_0(\varepsilon)$ die Beziehung $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ gilt. Die betrachtete Folge ist also Cauchfolge in (E, d).

<u>Variante 2:</u> (E, d) ist Teilraum des metrischen Raumes $\mathbb{R}$. Die Folge

$$\left(\frac{1}{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert gegen $x = 0$ in $\mathbb{R}$. Als konvergente Folge muss die Folge Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ sein. Beide Räume sind aber mit der gleichen Metrik versehen, so dass die Folge auch Cauchyfolge in (E, d) ist.

(d) Die Folge konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen das Grenzelement $x = 0$, dass nicht zu $E = (0, 1)$ gehört.

4. **Konvergenz von Reihen**
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\sqrt{k}}{k^k}$.

Lösung:

(a) Für alle $k \geq 1$ gilt die Abschätzung

$$\frac{k+1}{k^2+1} \geq \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{1}{2k},$$

die Reihe $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist eine Minurante zur Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+1}$. Da die Minurante divergiert, divergiert auch $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+1}$ divergieren.

(b) Wir wenden das Quotientenkriterium für Reihen mit positiven Gliedern an:

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1)!\sqrt{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!\sqrt{k}} \\ &= \sqrt{\frac{k+1}{k}}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \sqrt{\frac{k+1}{k}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}} \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} < 1$$

ist die Reihe konvergent.

5. **Stetigkeit**
Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f entlang jeder Geraden durch den Ursprung eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

(b) Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Ursprung stetig?

(c) Zeigen Sie, dass $-\frac{1}{2} \leq f(x,y) \leq +\frac{1}{2}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Lösung

(a) Jede Gerade durch den Ursprung kann in der Form $y = mx$, $x \in \mathbb{R}$ oder $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Im ersten Fall gilt: Die Abbildung

$$x \mapsto f(x,mx) = \begin{cases} \dfrac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig, denn die gebrochen rationale Funktion

$$x \mapsto \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2} \quad x \neq 0$$

ist für alle $x \neq 0$ stetig und es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0 = f(0,0).$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass f entlang der Geraden $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$ stetig ist. Zunächst haben wir

$$y \mapsto f(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad y = 0. \end{cases},$$

also $f(0,y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Als konstante Funktion ist $y \mapsto f(0,y)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

(b) Wir zeigen mit dem Folgenkriterium, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Ursprung nicht stetig ist. Die Folge

$$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert in $\mathbb{R}^2$ gegen den Ursprung $(0,0)$, die Folge der zugeordneten Funktionswerte wegen

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

aber gegen $1/2$ und damit nicht gegen den Funktionswert $f(0,0) = 0$.

(c) Im Fall $(x,y) = (0,0)$ gilt $-\frac{1}{2} \leq f(0,0) = 0 \leq +\frac{1}{2}$. Betrachten wir nun den Fall $(x,y) \neq (0,0)$. Aus

$$(|x| - y^2)^2 \geq 0$$

erhalten wir durch Ausrechnen und Umstellen

$$\begin{aligned} x^2 - 2|x|y^2 + y^4 &\geq 0 \\ x^2 + y^4 &\geq 2|x|y^2 \end{aligned}$$

woraus schließlich

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2 + y^4}\right| \leq \frac{1}{2}$$

folgt. Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu

$$-\frac{1}{2} \leq f(x,y) \leq +\frac{1}{2}.$$

6. **Potenzreihen**

(a) Bestimmen Sie in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ den Konvergenzbereich D der Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) Durch Reihenmultiplikation zeige man für z, $2z \in D$

$$2\,[f(z)]^2 = 1 + f(2z).$$

Hinweis: Die Beziehung

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} = \begin{cases} 2^{2n-1} & \text{für} \quad n \geq 1 \\ 1 & \text{für} \quad n = 0 \end{cases}$$

darf ohne Nachweis benutzt werden.

Lösung:

(a) Mit dem Quotientenkriterium untersuchen wir die Potenzreihe auf absolute Konvergenz. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{z^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|}{\left|\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}\right|} = |z|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

ist die Reihe auf $D = \mathbb{C}$ konvergent.

(b) Die Anwendung der Cauchyschen Produktbildung ergibt zunächst

$$\begin{aligned} 2\,[f(z)]^2 = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right)^2 &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{z^{2m}\; z^{2n-2m}}{(2m)!\,(2n-2m)!} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m}. \end{aligned}$$

Um für die innere Summe den Hinweis anwenden zu können, spalten wir in der äußeren Reihe den ersten Summanden ab und erhalten

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} &= 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m}\right) \\ &= 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} 2^{2n-1} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Die Reihe stimmt bis auf den fehlenden Summanden für $n = 0$ mit $f(2z)$ überein. Es gilt also

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = 1 + f(2z).$$