Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. B. Kummer

Klausur Analysis I (WS 2010/11) mit Lösungen

Vorbemerkungen: Wählen Sie aus den vorgegebenen Ausgaben **8** aus!
Tragen Sie am Ende in der folgenden Tabelle die Nummern der acht Aufgaben ein, die in Ihre Klausurbewertung eingehen sollen. Schreiben Sie auf jedes von ihnen abzugebende Blatt (auch dieses) ihre Matrikelnummer!

Matrikelnummer: **Name:**

Aufgabe								
Punkte								

Jede Aufgabe bringt maximal 5 Punkte. Viel Erfolg!

Achtung: Die angegebenen Lösungen waren Hinweise zum Korrigieren! Nicht alle benutzten Teilbehauptungen sind deshalb bis ins Letzte bewiesen, wie es nötig wäre. Ich hoffe dennoch, dass es Ihnen hilft. BK

Aufgabe 1: (Cauchy-Folgen) *5 Punkte*

Warum ist jede konvergente Folge im metrischen Raum (X, d) eine Cauchy-Folge?

Lösung: Es ist $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_m)$.
Wegen Konvergenz gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε mit $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon/2$ und $d(\bar{x}, x_m) < \varepsilon/2$, falls $n, m > n_\varepsilon$. Damit ist $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für hinreichend große n und m wie für Cauchy-Folgen gefordert.
Wer dasselbe mit ε und 2ε aufschreibt, soll ebenfalls die Punkte bekommen.

Aufgabe 2: (Konvergenz in metrischen Räumen) *5 Punkte*

a) Eine Folge $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ sei konvergent mit Grenzwert $\bar{x}$ im metrischen Raum (X, d).
Warum ist dann für beliebiges $x \in X$ die Folge $\{d(x_n, x)\}_{n=1,2,...}$ beschränkt in $\mathbb{R}$? (3 P)

b) Geben Sie eine konkrete reelle Folge an die zeigt, dass aus der Beschränktheit jeder Folge $\{d(x_n, x)\}_{n=1,2,...}$ noch nicht die Konvergenz der Folge $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ folgt. (2 P)

Lösung:

a) Es ist $d(x_n, x) \leq d(x_n, \bar{x}) + d(\bar{x}, x) < 1 + d(\bar{x}, x)$ für (große) $n > n_0$. Mit

$$C = \max\{d(x_1, \bar{x}), d(x_2, \bar{x}), \ldots, d(x_{n_0}, \bar{x})\}$$

folgt so z.B. $d(x_n, x) < K := 1 + C + d(\bar{x}, x)$.

b) Man nehme etwa die nicht konvergente Folge mit $x_n = (-1)^n$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (Grenzwertberechnungen) *5 Punkte*

Welche der angegebenen reellen Folgen $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ sind konvergent in $\mathbb{R}$? Begründen Sie ihre Antwort. (Gegebenenfalls können Sie einen Limes durch einen $f(x)/g(x)$-Limes ersetzen und die Regel von l'Hospital anwenden.)

a) $x_n := \sqrt{3n+6} - \sqrt{3n+1}$ (1 P)

b) $x_n := (-1)^n \, n \sin(1/n)$ (1 P)

(*Hinweis: Es kann hilfreich sein,* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ *zu betrachten.*)

c) $x_n := \frac{\ln(n)}{n}$ (1 P)

d) Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gelte

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k+1 \text{ ungerade;} \\ 0, & n = 2k \qquad \text{gerade.} \end{cases}$$

Ist diese Reihe konvergent? (Begründung) (2 P)

Lösung:

a) $x_n = \frac{(3n+6)-(3n+1)}{\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}} = \frac{5}{\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}} \to 0.$

b) Da $n\sin(1/n) = \frac{\sin(1/n)}{1/n}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$ (Vorlesung oder l'Hospital), gilt für große n, dass $|x_{n+1} - x_n| > 1$. Daher kann die Folge nicht konvergieren.

c) Variante 1: $e^{x_n} = e^{\frac{\ln n}{n}} = \sqrt[n]{e^{\ln n}} = \sqrt[n]{n} \to 1$. Weil $f(x) = e^x$ bijektiv und stetig von $\mathbb{R}$ auf $(0,\infty)$ ist, folgt $x_n \to 0$.

Variante 2: Sei $\varepsilon > 0$. $x_n < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln(n)}{\varepsilon} < n \;\Leftrightarrow\; \sqrt[\varepsilon]{n} = n^{1/\varepsilon} < e^n$ (wegen Monotonie der e-Funktion). Die letzte Ungleichung gilt für alle hinreichend großen n (siehe Vorlesung). Also ist der Limes Null.

Variante 3: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ nach l'Hospital, also insbesondere $x_n := \frac{\ln(n)}{n} \to 0$.

d) Divergenz (indirekt): Wäre die Reihe konvergent, so auch die Reihe $1 + 1/3 + 1/5 + \dots$ und damit auch die Reihe mit kleineren Summanden $1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots$ Damit müsste auch die Summe beider Reihen konvergent sein, also die harmonische Reihe. Diese ist aber divergent (Vorlesung).

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (Stetigkeit) *5 Punkte*

Es seien f und g reelle Funktionen und $u = f + g,\ v = f - g$.

a) Warum sind f und g beide stetig, wenn u und v beide stetige Funktionen sind? (3 P)

b) Warum folgt die Stetigkeit von f und g nicht aus der Stetigkeit von u allein? (2 P)
(*Hinweis: Geben Sie ein Gegenbeispiel an.*)

Lösung:

a) Es folgt über $f = g + v$ und $u = g + v + g$, dass

$$g = \frac{1}{2}(u - v) \quad \text{und} \quad f = u - \frac{1}{2}(u - v) = \frac{1}{2}(u + v).$$

Als Summe/Differenz stetiger Funktionen sind deshalb auch f und g stetig.

b) Man nehme etwa $f(x) = 1/x$ falls $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ und setze $g = -f$.

Aufgabe 5: (Differenzierbarkeit) *5 Punkte*

Warum ist $f(x) = e^{|x|}$ nicht differenzierbar in $\bar{x} = 0$?
(*Hinweis: Nutzen Sie die Ableitung von e^x.*)

Lösung: Für $h > 0$ gilt $\frac{e^{|h|}-e^{|0|}}{h} = \frac{e^h - e^0}{h}$ mit Limes $f'(0) = e^0 = 1$ wenn $h \to 0$.
Für $h < 0$ gilt $\frac{e^{|h|}-e^{|0|}}{h} = \frac{e^{-h}-e^0}{h} = -(\frac{e^{-h}-e^0}{-h})$ mit Limes $-f'(0) = -e^0 = -1$ wenn $h \to 0$.
Also gibt es für $h \to 0$ unterschiedliche Limes der Differenzenquotienten.

Aufgabe 6: (Extremwertberechnung) *5 Punkte*

Für welche Kantenlängen x und y hat ein Rechteck mit der vorgegebenen Diagonallänge $L > 0$ die größte Fläche? (Begründung)

Lösung:

1 P Vorbereitung: $(x, y > 0)$ Flächeninhalt $A = xy$; Beziehung Seitenlängen und Diagonale $x^2 + y^2 = L^2$, also $y = \sqrt{L^2 - x^2}$; betrachte $A(x) = x\sqrt{L^2 - x^2}$

1 P 1. Ableitung: $A'(x) = \sqrt{L^2 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{L^2-x^2}} = \sqrt{L^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{L^2-x^2}}$

1 P Nullstelle 1. Ableitung: $A'(x) = 0$ gdw. $(L^2 - x^2) - x^2 = 0$ gdw. $2x^2 = L^2$ gdw. $x = \frac{L}{\sqrt{2}}$; somit $y = \sqrt{L^2 - (L/\sqrt{2})^2} = \frac{L}{\sqrt{2}} = x$

1 P 2. Ableitung: $A''(x) = \frac{-x}{\sqrt{L^2-x^2}} - \frac{2x\sqrt{L^2-x^2} - x^2(-x/\sqrt{L^2-x^2})}{L^2-x^2}$

1 P 2. Ableitung < 0: wg. $x = y = \sqrt{L^2 - x^2}$ für $x = \frac{L}{\sqrt{2}}$ ist $A''(\frac{L}{\sqrt{2}}) = -1 - \frac{2x^2 - x^2(-1)}{x^2} = -4 < 0$

Bitte wenden!

Aufgabe 7: (Eindeutige Lösbarkeit) *5 Punkte*

Warum ist die reelle Gleichung $7x + (\sin(3x-1))^2 = 0$ eindeutig lösbar?

Lösung:

1 P Die Gleichung ist gleichbedeutend mit $x = -\frac{1}{7}\sin^2(3x-1) \quad =: f(x)$.

1 P Wegen $f' = -\frac{1}{7}\left[2 * \sin(3x-1)\cos(3x-1) * 3\right]$ ist $|f'| \leq \frac{6}{7} < 1$.

1 P Nach MWSatz ist damit f kontraktiv, weil $|f(y) - f(x)| \leq |f'(\theta)|\,|y-x|$.

1 P Banachs Fixpunktsatz liefert die Behauptung, da

1 P $X = \mathbb{R}$ (laut Vorlesung) vollständig ist.

Aufgabe 8: (Potenz- und Taylor-Reihe) *5 Punkte*

Man betrachte die Reihe $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

a) Warum konvergiert die Reihe für jedes reelle x? (2 P)

b) Warum ist der Limes gerade $\sinh(x)$? (3 P)

Lösung:

a) Quotientenkriterium (am einfachsten) oder Wurzelkriterium (haben wir als Übungsaufg. behandelt) reicht für absol. Konvergenz.

b) Die Ableitungen von $\sinh(x)$ sind abwechselnd $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ (Vorlesung) mit Werten 1 bzw. 0 in $x = 0$. (1P)

Damit ist die obige Reihe die Taylor-Reihe zu $\sinh(x)$, entwickelt in $a = x_0 = 0$. (1P)

Sie konvergiert gegen $\sinh(x)$, weil für jedes feste x und $\theta \in (0, x)$ die Ableitung $f^{(n+1)}(\theta)$ im Restglied $R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ im Betrag beschränkt bleibt und $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$; also $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ gilt. (1P)

Bitte wenden!

Aufgabe 9: (Komplexe Zahlen) *5 Punkte*

Berechnen Sie die komplexen Ausdrücke (eventuell nötige Winkel dürfen als Werte von arctan angegeben werden):

a) $z = \frac{2-3i}{1+4i}$ (1 P)

b) $z = \sqrt[3]{3+4i}$ (2 P)

c) $z = \sin(i)$ (2 P)

(*Hinweis: Die obige Reihe für* $\sinh(x)$ *darf benutzt werden.*)

Lösung:

a) $\frac{2-3i}{1+4i} = \frac{(2-3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{2-12-i(3+8)}{17} = -\frac{10+11i}{17}$.

b) $z = \sqrt[3]{3+4i}$, polar $\tan\phi = 4/3$; $\phi = \arctan(4/3)$, Betrag $= \sqrt{25} = 5$

$z = \sqrt[3]{3+4i} = \sqrt[3]{5}\left(\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\phi}{3} + \frac{2k\pi}{3})\right), \quad k = 0, 1, 2.$

c) Nach Def. des Sinus (als Reihe) ist

$$\sin(i) = i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} - \frac{i^7}{7!} + \ldots = i\,(1 - \frac{i^2}{3!} + \frac{i^4}{5!} - \frac{i^6}{7!} + \ldots) = i\,(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \ldots)$$
$$= i\sinh(1) = \frac{i}{2}(e^1 - e^{-1}).$$

Aufgabe 10: (Stammfunktionen) *5 Punkte*

Berechnen Sie je eine Stammfunktion zu

a) $x\sin(3x)$ (3 P)

b) $x^2\ln(x)$ für $x > 0$. (2 P)

Lösung:

a) Setze $u' = \sin(3x)$; also $\int x\sin(3x)\,dx = -x\frac{1}{3}\cos(3x) - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\,dx = -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)$.

Probe-Abl.: $-\frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}3x\sin(3x) + \frac{1}{9}3\cos(3x) = x\sin(3x)$.

b) Setze $u' = x^2$; also $\int x^2\ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3x^{-1}\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3$.

Probe-Abl.: $x^2\ln(x) + \frac{1}{3}x^3x^{-1} - \frac{1}{3}x^2 = x^2\ln(x)$.