SS 2008
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Klausur Analysis I

14.07.2008

Name:
Vorname:

Matr.-Nr.:
Studiengang:

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (nur Matrikelnummer und Punktzahl) im Internet sowie am schwarzen Brett neben dem Raum MA 320 bin ich einverstanden:
Unterschrift (optional): ______________________

Geben Sie bei allen Antworten einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften Sie dieses mit Ihrem Namen sowie Ihrer Matrikelnummer.
Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Schreiben Sie nicht mit Bleistift.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									
Korrektor									

Aufgabe 1 (Bernoullische Ungleichung) Sei $t \in [-1, \infty)$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: (5 Punkte)

$$(1+t)^n \geq 1 + nt.$$

Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $t < -1$, so dass die obige Ungleichung nicht gilt?

Aufgabe 2 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie folgende Implikation (mittels der Definition von Konvergenz): (4 Punkte)

$$(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge } \Longrightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } a.$$

Aufgabe 3 Überprüfen Sie die Richtigkeit der folgenden Gleichung, indem Sie Partialsummen betrachten: (4 Punkte)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = +\infty.$$

Aufgabe 4 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? (12 Punkte)

(a) Sei A eine Indexmenge. Seien $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ offen für alle $\alpha \in A$. Dann ist $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ offen.

(b) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{k^2}}{\sqrt{k+1}}$$

konvergiert. (Hinweis: Es gilt $\sin x \leq x$ für alle $x \geq 0$; muss nicht bewiesen werden.)

(c) Eine reelle Zahl kann gleichzeitig ein innerer Punkt sowie ein Randpunkt einer Teilmenge D von $\mathbb{R}$ sein.

(d) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ folgenkompakt. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von D ebenfalls folgenkompakt.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte - falls diese existieren: (6 Punkte)

(a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{(\tan \sqrt{x})^2}{x}$, (Hinweis: Es gilt $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; muss nicht bewiesen werden.)

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)}$.

Aufgabe 6 Seien $L > 0$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, so dass (4 Punkte)

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad \text{für alle } x, y \in D$$

gilt. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 7 Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert mit (6 Punkte)

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \cdot \left|\sin \frac{1}{x}\right| & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar ist.

Aufgabe 8 Geben Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert mit (9 Punkte)

$$f(x) := \exp(\cos x), \quad x \in \mathbb{R}$$

an der Entwicklungsstelle $p = 0$ an. Zeigen Sie, dass der Fehler im Intervall $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ nicht größer als $e\pi^3 \frac{17}{8 \cdot 6^4}$ ist (bessere Abschätzungen sind ebenfalls möglich), indem Sie das Restglied in Lagrange'scher Form nach oben abschätzen. (Hinweis: Es gilt $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; muss nicht bewiesen werden.)

(Gesamtpunktzahl: 50 Punkte)

SS 2008 Technische Universität Berlin
Prof. Dr. John M. Sullivan Fakultät II
Kerstin Günther Institut für Mathematik

Lösungen zur Klausur Analysis I

vom 14.07.2008

Aufgabe 1 Induktionsbeginn: Für $n = 0$ gilt $(1 + t)^0 \geq 1 + 0t$ (1 Punkt)
Induktionsschritt: Für $n \in \mathbb{N}$ fest gelte $(1 + t)^n \geq 1 + nt$. (1 Punkt)
Dann (2 Punkte)

$$\begin{aligned}(1+t)^{n+1} &= (1+t)(1+t)^n \\ &\geq (1+t)(1+nt) \quad \text{(nach IV und da } 1+t \geq 0) \\ &\geq 1 + (n+1)t + nt^2 \\ &\geq 1 + (n+1)t \quad (\text{da } nt^2 \geq 0).\end{aligned}$$

Damit ist die Bernoullische Ungleichung gezeigt.
Beispielsweise gilt die Ungleichung nicht für $t = -3$ und $n = 5$: (1 Punkt)

$$(1+t)^n = (-2)^5 = -32 < -14 = 1 + 5(-3) = 1 + nt.$$

Aufgabe 2 Sei $\varepsilon > 0$. (1 Punkt)
Nach Voraussetzung existieren $n_1 > 0$ sowie $n_2 > 0$ mit (1 Punkt)

$$\begin{aligned}|a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1, \\ |b_n - a_n - 0| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2.\end{aligned}$$

Für $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ folgt mit der Dreiecksungleichung: (2 Punkte)

$$|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Damit konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 3 Es gilt (3 Punkte)

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=1}^{n} \log(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \log(\frac{k+1}{k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \log(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(k+1) \quad \text{(Teleskopsumme)} \\ &= \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1).\end{aligned}$$

Wegen (1 Punkt)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty,$$

folgt die Gleichung.

Aufgabe 4

(a) Falsch: (1 Punkt)
Für $A = \mathbb{N}^+$ und $\alpha \in \mathbb{N}^+$ sei $U_\alpha := (1 - \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\alpha})$. (2 Punkte)
Die Menge U_α ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^+$ offen (Vorlesung) und es gilt

$$\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha = \{1\}\,.$$

Aber die Menge $\{1\}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht offen, da es keine ε-Umgebung um 1 in $\mathbb{R}$ gibt, die in der Menge $\{1\}$ enthalten ist. (1 Punkt)

(b) Wahr: (1 Punkt)
Es gilt (2 Punkte)

$$\frac{\sin\frac{1}{k^2}}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{\frac{1}{k^2}}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}^+$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ konvergiert (Vorlesung), ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin\frac{1}{k^2}}{\sqrt{k+1}}$ nach dem Vergleichskriterium ebenfalls konvergent.

(c) Falsch: (1 Punkt)
Ein Randpunkt kann per Definition kein innerer Punkt sein. (1 Punkt)

(d) Wahr: (1 Punkt)
Wenn D folgenkompakt ist, dann ist D nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß beschränkt. (2 Punkte) Da eine abgeschlossene Teilmenge der beschränkten Menge D ebenfalls beschränkt ist, folgt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass diese Teilmenge folgenkompakt ist.

Aufgabe 5

(a) Es gilt (2 Punkte)

$$\frac{(\tan\sqrt{x})^2}{x} = \frac{\sin\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\cos\sqrt{x})^2} = \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{(\cos\sqrt{x})^2}$$

für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Damit folgt (1 Punkt)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\tan\sqrt{x})^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{(\cos\sqrt{x})^2} = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \frac{1}{(\cos y)^2} = 1.$$

(b) Aus der Regel von l'Hospital erhalten wir (da $\lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2\cos z - z\sin z}$ existiert, ist die Regel von l'Hospital anwendbar) (1 Punkt)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin x^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sin z + z\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2\cos z - z\sin z} = \frac{1}{2}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 6 Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. (2 Punkte)
Für $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ gilt dann: (2 Punkte)

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x-y| < L\delta = \varepsilon.$$

Damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von f gezeigt.

Aufgabe 7 Für $h \neq 0$ gilt (2 Punkte)

$$\frac{h^3\left|\sin\frac{1}{h}\right| - 0}{h} = h^2\left|\sin\frac{1}{h}\right| \le h^2.$$

Da (3 Punkte)

$$\frac{h^3\left|\sin\frac{1}{h}\right| - 0}{h} = h^2\left|\sin\frac{1}{h}\right| > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} h^2 = 0,$$

folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3\left|\sin\frac{1}{h}\right| - 0}{h} = 0$$

Somit ist f in 0 differenzierbar. (1 Punkt)

Aufgabe 8 Es gilt (2 Punkte)

$$\begin{aligned} &f(0) = \exp 1, \\ &f'(x) = \exp(\cos x)(-\sin x), \quad f'(0) = 0, \\ &f''(x) = \exp(\cos x)((\sin x)^2 - \cos x), \quad f''(0) = -\exp 1. \end{aligned}$$

Damit ist $T_2(x) = \exp(1)(1 - \frac{x^2}{2})$ das zweite Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $p = 0$. (1 Punkt)
Berechnung des Fehlers auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ mittels des Restglieds in Lagrange'scher Form: Für $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ existiert ein y zwischen 0 und x, so dass (1 Punkt)

$$|f(x) - T_2(x)| = \left|f^{(3)}(y)\frac{x^3}{3!}\right|.$$

Insbesondere ist $y \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.
Es gilt (1 Punkt)

$$f'''(x) = \exp(\cos x)\big(-(\sin x)^3 + 3\sin x\cos x + \sin x\big).$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung: (4 Punkte)

$$\max_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} \{|f(x) - T_2(x)|\} \le \max_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} \left\{\left|\max_{y\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} f^{(3)}(y)\frac{x^3}{3!}\right|\right\} \le \left|\max_{y\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} f^{(3)}(y)\right| \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \frac{1}{3!}$$
$$\le \big|\exp(\cos y)\big(-(\sin y)^3 + 3\sin y\cos y + \sin y\big)\big| \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \frac{1}{3!}$$
$$\le e^1\big(\big|-(\sin y)^3\big| + |3\sin y\cos y| + |\sin y|\big)\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \frac{1}{3!}$$
$$\le e\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \frac{1}{3!} = e\frac{17}{8}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \frac{1}{3!} = e\pi^3\frac{17}{8\cdot 6^4}.$$

Bessere Abschätzungen sind ebenfalls möglich.