Analysis I So Se 07 Stäulein

1. Klausur

Name: ....

Aufgabe 1: Beweise mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k = \frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{4}.$$

Lösung :
Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k = (-1)^2 1 = 1$$
$$\frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{4} = \frac{1+3(-1)^2}{4} = 1.$$

Das beweist die Behauptung für $n = 1$.
Induktionsannahme: Die Behauptung ist wahr für $n = N \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Wir zeigen die Behauptung für $n = N+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^{k+1}k &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}k + (-1)^{N+2}(N+1) \\
&= \frac{1+(-1)^{N+1}(2N+1)}{4} + (-1)^{N+2}(N+1) \\
&= \frac{1+(-1)^{N+1}(2N+1)+(-1)^{N+2}(4N+4)}{4} \\
&= \frac{1+(-1)^{N+1}\left((2N+1)+(-1)(4N+4)\right)}{4} \\
&= \frac{1+(-1)^{N+1}\left(-(2N+2+1)\right)}{4} \\
&= \frac{1+(-1)^{(N+1)+1}(2(N+1)+1)}{4}.
\end{aligned}$$

Die Induktionsannahme wurde in der zweiten Zeile verwendet. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung richtig für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Name: ....

Aufgabe 2: Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweise die Ungleichung

$$\binom{2n}{n} \leq 4^n \, .$$

Hinweis: Man verwende *nicht* die Formel $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Lösung :
1. Möglichkeit: Wir verwenden wieder vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt

$$\binom{2}{1} = 2 \text{ und } 4^1 = 4.$$

Die Behauptung ist also wahr für $n = 1$.
Induktionsannahme: Die Behauptung ist wahr für $n = N \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Wir zeigen die Behauptung für $n = N + 1$:

$$\begin{aligned}\binom{2(N+1)}{N+1} \Big/ \binom{2N}{N} &= \frac{(2N+2)!}{(N+1)!(N+1)!} \cdot \frac{N!N!}{(2N)!} \\ &= \frac{(2N+2)(2N+1)}{(N+1)(N+1)} \\ &= 2\frac{2N+1}{N+1} \leq 4.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\binom{2(N+1)}{N+1} \leq 4\binom{2N}{N} \leq 4 \cdot 4^N = 4^{N+1}.$$

Hier haben wir die Induktionsvorraussetzung verwendet. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen. □

2. Möglichkeit: Mit der binomischen Formel :

$$\begin{aligned}4^n = 2^{2n} &= (1+1)^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k \cdot 1^{2n-k} \\ &\geq \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

denn alle Summanden, die in der zweiten Zeile stehen sind positiv. □

Name:...

Aufgabe 3: Zeige *nur mit der Definition von Konvergenz,* dass die Folge

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

gegen 1 konvergiert. (Bei dieser Aufgabe dürfen Sie also *keine* Rechenregeln für $\lim_{n\to\infty}$ verwenden.)

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist $N \in \mathbb{R}$, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Es gilt

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= \left|\frac{2\sqrt{n} - (2\sqrt{n}-1)}{2\sqrt{n}-1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\sqrt{n}-1}\right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}-1}, \end{aligned}$$

weil der Ausdruck in der letzten Zeile positiv ist. Die Ungleichung $|a_n - 1| < \varepsilon$ ist erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{n}-1} &< \varepsilon \\ \iff \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right) &< \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > N := \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)^2$.

Also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. $\square$

Name: ....

Aufgabe 4: Bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{4n^2 - 3}{|-2n^2 + 10n - 3| + 1}.$$

Lösung: Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{4 - 3/n^2}{|-2 + 10/n - 3/n^2| + 1/n^2}.$$

Nach Vorlesung ist $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0 = \lim_{n\to\infty} 1/n^2 = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n}$. Aus den Rechenregeln für $\lim_{n\to\infty}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} (4 - 3/n^2) = 4$$
$$\lim_{n\to\infty} |-2 + 10/n - 3/n^2| = 2 \neq 0$$

Insgesamt also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{2 \cdot 1 + 0} = 2.$$

Name: ....

Aufgabe 5: Zeige, dass die Menge

$$A =]1,2] \cup \left\{ \frac{n+5}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

nach unten beschränkt ist und bestimme ihr Infimum. Hat A ein Minimum?

Lösung: Wir definieren

$$a_n = \frac{n+5}{2n+1}.$$

Es gilt $a_n > \frac{1}{2}$, denn $2n+10 > 2n+1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $x > \frac{1}{2}$ für alle $x \in]1,2]$. Also ist $1/2$ eine untere Schranke von A.

Nach den Rechenregeln für $\lim_{n\to\infty}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5/n}{2+1/n} = \frac{1}{2}.$$

Sei nun $x > 1/2$. Wir setzten $\varepsilon = (x-1/2)/2$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{R}$, so dass

$$|a_n - 1/2| < \varepsilon$$

für $n \geq N$. Für diese n gilt

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - 1/2) + 1/2 \\ &< \varepsilon + 1/2 \\ &= \frac{x+1/2}{2} < x. \end{aligned}$$

Also ist x keine obere Schranke. Damit ist $1/2$ die kleinste obere Schranke, d.h. $\inf(A) = 1/2$. Die Menge A kein Minimum weil $\inf(A) = 1/2 \notin A$.

Name: ....

Aufgabe 6: Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 + i = 0 \tag{1}$$

mit $z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Benutze die geometrische Summenformel (in $\mathbb{C}$).

Lösung: Die geometrische Summenformel

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

gilt auch für komplexe Zahlen. Mit ihrer Hilfe erhält man (für $n = 2$)

$$\begin{aligned} z^3 + i &= z^3 - i^3 \\ &= (z-i)(z^2 + iz - 1). \end{aligned}$$

Also ist $z_1 = i$ eine Lösung von (1). Die anderen Lösungen von (1) erfüllen $z^2 + iz - 1 = 0$. Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind

$$\begin{aligned} z_{2,3} &= \frac{-i \pm \sqrt{-1 - 4(-1)}}{2} \\ &= \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}. \end{aligned}$$