Aufgabe 1

Wir beginnen mit einem kurzen

Lemma 1. *Es gilt für alle $b \geq a > 0$ und alle $c > 0$*

$$a^c \leq b^c. \tag{1}$$

Beweis: Sei a, b, c wie im Lemma verlangt, dann folgt aufgrund der Monotonie von Logarithmus und Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \ln(a) \leq \ln(b) \Rightarrow c\ln(a) \leq c\ln(b) \Rightarrow e^{c\ln(a)} \leq e^{c\ln(b)} \\ \Rightarrow e^{\ln(a^c)} \leq e^{\ln(b^c)} \Rightarrow a^c \leq b^c. \end{aligned} \tag{2}$$

Nun zur Aufgabe, sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $a_0 := 2, a_{n+1} := \sqrt{a_n}$ definiert.

a): Es ist zu zeigen, dass $1 \leq a_n \leq 1 + 2^{-n}$ gilt. Wir zeigen zuerst durch Induktion, dass

$$a_n = 2^{2^{-n}} \tag{3}$$

gilt. Der Induktionsanfang ist klar, weil $2^{2^{-0}} = 2$ ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $a_n = 2^{2^{-n}}$, zeige dass $a_{n+1} = 2^{2^{-(n+1)}}$ gilt. Nach Definition gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} = \sqrt{2^{2^n}} = 2^{2^{-n}/2} = 2^{2^{-(n+1)}}. \tag{4}$$

Es gilt einerseits für alle n aus den natürlichen Zahlen, aufgrund des Lemmas

$$\begin{aligned} &1 \leq 2 \\ \Rightarrow &1^{\frac{1}{2^n}} \leq 2^{\frac{1}{2^n}} \iff 1 \leq a_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Andererseits gilt, ebenfalls aufgrund Bernoulli-Ungleichung und des Lemmas

$$\begin{aligned} (1+2^{-n})^{2^n} &\geq 1 + 2^{-n}2^n = 2 \\ \Rightarrow \left((1+2^{-n})^{2^n}\right)^{2^{-n}} &\geq 2^{2^{-n}} \\ \iff 1 + 2^{-n} &\geq a_n \end{aligned} \tag{6}$$

□

Ein alternative Lösungsweg ist über Induktion und die Gleichung $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

b): Die Aussage $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 1$ ist so definiert:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \ \forall m > N : |a_m - 1| < \varepsilon. \tag{7}$$

c): Sei $\varepsilon > 0$ und $N = \left\lfloor \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$, dann gilt für alle $m > N$

$$\begin{aligned} |a_m - 1| &\leq 1 + 2^{-n} - 1 = 2^{-m} \leq 2^{-N} \\ &= 2^{-\left(\left\lfloor \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1\right)} \leq 2^{-\frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei für die erste Ungleichheit in der zweiten Zeile die Eigenschaften der Gaußklammer verwendet wurden. □

Aufgabe 2

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Nehme o.B.d.A. an, dass $|x| \leq |y|$. Es gilt

$$\left|\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \frac{2|y|}{1+y^2}. \tag{9}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls einerseits $|y| < 2$, dann gilt, dass (9) durch 4 beschränkt ist. Falls dagegen $|y| \geq 2$, so ist

$$\frac{2|y|}{1+y^2} \leq \frac{2|y|}{y^2} = \frac{2}{|y|} \leq 1.$$

In beiden Fällen ist S beschränkt.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} : (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$ Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{S} > 0$. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$, dass

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| = \frac{|y^2 - x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{|y-x| \cdot |y+x|}{(1+x^2)(1+y^2)} < \delta S = \varepsilon.$$

Aufgabe 3

a): Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Es ist zu zeigen, dass die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{10}$$

konvergiert. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für das n-te Glied der die Reihe definierenden Folge

$$\begin{aligned}
\left|n^{-s}\right| &= \left|e^{-s\ln(n)}\right| = \left|e^{-\mathrm{Re}(s)\ln(n) - i\mathrm{Im}(s)\ln(n)}\right| \\
&= \left|e^{-\mathrm{Re}(s)\ln(n)} e^{-i\mathrm{Im}(s)\ln(n)}\right| \\
&= \left|e^{-\mathrm{Re}(s)\ln(n)}\right| \left|e^{-i\mathrm{Im}(s)\ln(n)}\right| \\
&= e^{-\mathrm{Re}(s)\ln(n)} = n^{-\mathrm{Re}(s)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Also gilt für die jede Partialsumme bis zu einem gegebenen $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} n^{-s}\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \left|n^{-s}\right| = \sum_{n=1}^{N} n^{-\mathrm{Re}(s)} \leq \zeta\left(\mathrm{Re}(s)\right), \tag{12}$$

die Partialsummen konvergieren also. □

b): Sei für jedes $p \in \mathbb{N}$ eine Folge $(a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben. Es existiert eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, sodass

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}_0 \lim_{p\to\infty} a_{p,n} = b_n \\
&\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall p \in \mathbb{N}_0 : |a_{p,n}| \leq c_n \\
&\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty
\end{aligned} \tag{13}$$

gilt. Dann gilt auch

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{p,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{p\to\infty} a_{p,n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{14}$$

c): Sei $(a_l)_{l\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ mit $\operatorname{Re}(a_l) > 1$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Nehme an, dass die Folge $(a_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ gegen $b \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(b) > 1$ konvergiert. Dann existiert $\inf\{\operatorname{Re}(a_l) \mid l \in \mathbb{N}_0\} := c$. Gliedweise gilt dann

$$\left|n^{-a_l}\right| \leq n^{-c} \tag{15}$$

mit der gleichen Rechnung wie in der ersten Teilaufgabe. Die Folge $(n^{-c})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also die vom Satz der dominierten Konvergenz geforderte Majorante, denn es gilt auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} = \zeta(c) < \infty. \tag{16}$$

Insgesamt vertauschen also der Grenzwert mit der Reihe in der folgenden Rechnung

$$\lim_{l\to\infty} \zeta(a_l) = \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a_l} \overset{b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{l\to\infty} n^{-a_l} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-b} = \zeta(b). \tag{17}$$

□

Aufgabe 4

(a) Es gilt $t_0 = 0$. Zum Zeitpunkt t_n ist der Jäger noch $1000 - t_n$ Meter von der Hütte entfernt. Um diese Strecke bis zur Hütte zurückzulegen braucht der Hund genau $\frac{1000-t_n}{2}$ Sekunden, was zur Rekursion

$$s_n = t_{n-1} + \frac{1000 - t_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}t_{n-1} + 500, \quad n \geq 1$$

führt. Zum Zeitpunkt s_n dagegen steht der Jäger noch $1000 - s_n$ Meter von der Hütte entfernt und die beiden laufen aufeinander zu. Da der Hund mit doppelter Geschwindigkeit läuft, muss der Jäger genau ein Drittel ebenjener $1000 - s_n$ Meter zurücklegen, bis das nächste Treffen erfolgt. Dies führt zur Rekursion

$$t_n = s_n + \frac{1000 - s_n}{3} = \frac{2}{3}s_n + \frac{1000}{3}, \quad n \geq 1.$$

(b) Das Einsetzen der Rekursion für s_n in die Rekursion für t_n führt zu

$$t_n = \frac{1}{3}t_{n-1} + \frac{2}{3} \cdot 500 + \frac{1000}{3} = \frac{1}{3}t_{n-1} + \frac{2000}{3}.$$

Diese Rekursion lässt sich leicht induktiv zu einer Summe auflösen und ergibt

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2000}{3^k} = 2000 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 20000 = 2000 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} - 2000 \\ &= 3000 \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - 2000 = 1000 \cdot (1 - 3^{-n}). \end{aligned}$$

Setzen wir nun diese explizite Form in die Rekursion für s_n ein, so erhalten wir

$$s_n = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}\right).$$