LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Probeklausur zur Analysis einer Variablen

Diese Leistung in dieser Probeklausur ("sinnvoll bearbeitet" oder "nicht sinnvoll bearbeitet") geht wie ein Hausaufgabenblatt in den *Übungsmodul* Analysis ein. Zusätzlich und unabhängig davon wird die Leistung bepunktet und benotet, doch die Punktezahl und die Note dienen nur zu Ihrer Selbsteinschätzung; sie spielt *keine* Rolle für die GOP.

P1 (7=3+1+3 Punkte) Gegeben sei die durch $a_0 := 2$, $a_{n+1} := \sqrt{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}_0}$.

(a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $1 \le a_n \le 1 + 2^{-n}$.

(b) Geben Sie an, wie die Aussage $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ definiert ist.

(c) Beweisen Sie $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ *direkt mit dieser Definition, ohne Sätze über die Konvergenz von Folgen als bekannt vorauszusetzen.* Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises.
Hinweis: Das Ergebnis der Teilaufgabe (a) kann Ihnen dabei helfen.

P2 (7=3+1+3 Punkte)

(a) Es sei gegeben:

$$S := \sup\left\{ \left| \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweisen Sie $S < +\infty$.

(b) Definieren Sie, wann eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig genannt wird.

(c) Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, gleichmäßig stetig ist. Achten Sie dabei besonders sorgfältig auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises.
Hinweis: Das Ergebnis der Teilaufgabe (a) kann Ihnen dabei helfen.

P3 (7=3+1+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{1}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, wobei $n^{-s} := \exp(-s \log n)$.
Hinweis: Die Konvergenz in $\mathbb{R}$ der Reihe für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ ist aus der Tutoriumsaufgabe T9.3 bekannt und darf ohne Beweis verwendet werden.

(b) Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen.

(c) Zeigen Sie, dass die durch die Formel (1) definierte Fortsetzung $\zeta : \{s \in \mathbb{C} | \; \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$ der Riemannschen Zetafunktion folgenstetig ist.

P4 (6=3+3 Punkte) Ein Jäger wandert mit seinem Hund zu einer Jagdhütte. Zum Startzeitpunkt $t_0 = 0\text{sec}$ sind beide noch 1000m von der Jagdhütte entfernt. Der Jäger wandert stets 1m/sec schnell; der Hund läuft stets doppelt so schnell. An der Jagdhütte angekommen, dreht der Hund jedesmal sofort um und läuft zum Jäger zurück; dort angekommen, dreht er jedesmal sofort um und läuft wieder zur Jagdhütte voraus. Für $n \in \mathbb{N}$ sei s_n der Zeitpunkt des n-ten Eintreffens des Hundes bei der Jagdhütte und t_n der Zeitpunkt der n-ten Rückkehr des Hundes zum Jäger.

(a) Entwickeln Sie Rekursionsformeln, die die Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simultan rekursiv definieren.

(b) Leiten Sie hieraus nicht rekursive Formeln für t_n und s_n, $n \in \mathbb{N}$, her.