AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Klausur

1. Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt
$$1 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2.$$
(+1)

   Damit ist der Induktionsanfang bewiesen. Induktionsschritt:
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) = \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}\right)^2.$$
(+3)

2. (a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ konvergiert. **(+2)**

   (b) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ und der Stetigkeit der Quadratwurzel, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$. **(+2)**
   Die Formel von Euler für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe liefert also, dass $R = 1$ gilt. **(+2)**
   Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ für alle $x \in (-1, 1)$ absolut und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. **(+2)**
   Wir untersuchen die Randpunkte gesondert.
   Für $x = 1$ wird die Reihe zu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Die Folge $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine streng monoton fallende Nullfolge, denn $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallende Nullfolge und die Quadratwurzel ist stetig und monoton. **(+2)**
   Aus dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe für $x = 1$ konvergiert. **(+2)**
   Für $x = -1$ wird die Reihe zu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Diese Reihe divergiert, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. Würde sie konvergieren, dann würde nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergieren. Alternativ kann man hier auch auf die Übungen verweisen. **(+2)**

3. (a) f heißt stetig in $x_0 \in I$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. **(+4)**

   (b) Weil $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig sind, folgt dass f stetig ist in allen Punkten $x \neq 0$. **(+4)**

   f ist jedoch nicht stetig in $x_0 = 0$: Die Folge $(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0)$. **(+2)**

4. (a) Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$, so existiert ein Punkt $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$. **(+6)**

   (b) Lösung 1:

   Betrachte die Funktion $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = -\frac{\pi}{2} \\ f \circ \tan(x) & \text{für } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{für } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   Weil f und tan differenzierbar sind, ist g auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nach der Kettenregel differenzierbar. **(+2)**

   Wegen $\lim\limits_{x\searrow-\frac{\pi}{2}} f\circ\tan(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} f\circ\tan(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, ist g auch in den Punkten $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ stetig. **(+2)**

   Also liefert der Satz von Rolle ein $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $(f \circ \tan)'(x_0) = 0$. **(+2)**

   Mit der Kettenregel folgt $0 = f'(\tan(x_0)) \cdot \tan'(x_0)$.

   Wegen $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, muss $f'(\tan(x_0)) = 0$ gelten. **(+2)**

   Lösung 2:

   Angenommen $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus dem Satz von Rolle, dass f injektiv ist. **(+2)**

   Sei $y \in \mathbb{R}$ ein Punkt mit $f(y) \neq 0$. Wir können annehmen, dass $f(y) > 0$, sonst betrachten wir die Funktion $-f$. Nach Annahme existiert ein $n \in \mathbb{N} \cap (y, \infty)$ mit $f(n) < \frac{f(y)}{2}$ und $f(-n) < \frac{f(y)}{2}$. **(+4)**

   Nach dem Zwischenwertsatz finden wir $z^+ \in (y,n)$ und $z^- \in (-n, y)$ mit $f(z^+) = f(z^-) = \frac{f(y)}{2}$. Dies widerspricht der Injektivität von f. Also muss ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ existieren mit $f'(x_0) = 0$. **(+2)**

5. (a) f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. **(+2)**

   (b) Weil $\sin(x)$ und x^2 auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, ist nach der Kettenregel auch $\sin^2(x)$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. **(+2)**

Weil $\ln(x)$ auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist und $x+1$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel, dass $\ln(1+x)$ auf $(-1,\infty)$ differenzierbar ist. **(+2)**

Wegen $\ln(1+x) \neq 0$ für $x \neq 0$ folgt aus der Quotientenregel, dass $\frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x)}$ differenzierbar ist auf $(-1,\infty)\setminus\{0\}$, also insbesondere auf $(-1,1)\setminus\{0\}$. **(+2)**

Wir diskutieren die Differenzierbarkeit in $x=0$. Weil $\sin(x)$ differenzierbar ist, gilt $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$. **(+2)**

Weiter gilt $\lim\limits_{h\to 0}\sin(h) = \lim\limits_{h\to 0}\ln(1+h) = 0$ und $\ln'(1+h) = \frac{1}{1+h} \neq 0$ für $h \in (-1,1)$. **(+2)**

Wegen $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)}{\frac{1}{1+h}} = \cos(0) = 1$ erhalten wir mit der Regel von l'Hospital $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{\ln(1+h)} = 1$. **(+2)**

Also folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin^2(h)}{\ln(1+h)}}{h} = (\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h})\cdot(\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{\ln(1+h)}) = 1.$$

Also ist f differenzierbar in 0 mit $f'(0)=1$. **(+2)**

6. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Treppenfunktion $\tau_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tau_n(x) = \begin{cases} (\frac{k}{n})^3 & \text{für } x \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}) \text{ und } k \in \{0,\dots,n-1\} \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

(+2)

Weil x^3 streng monoton steigend ist, gilt für $x \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})$ und $k \in \{0,\dots,n-1\}$: $|\tau_n(x) - x^3| = |(\frac{k}{n})^3 - x^3| \leq (\frac{k+1}{n})^3 - (\frac{k}{n})^3 = \frac{3k^2+3k+1}{n^3} < \frac{3(k+1)^2}{n^3} \leq \frac{3}{n}$. Weil die Abschätzung unabhänging von k ist, gilt sie für alle $x \in [0,1]$. **(+2)**

Also folgt $0 \leq \limsup \|\tau_n - x^3\| \leq \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0$ und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen x^3. **(+2)**

(b) Es gilt $\int_0^1 \tau_n(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}(\frac{k}{n})^3 = \frac{1}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^3 = \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{4n^2}$. **(+2)**

Es folgt $\int_0^1 x^3dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\tau_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$. **(+2)**