Lösungen zur Nachklausur zur “Analysis einer Variablen”

F. Merkl

3.4.2017

1. Die folgenden Teilaufgaben bauen teilweise aufeinander auf. Sie dürfen die Ergebnisse vorhergehender Teilaufgaben auch dann verwenden, wenn Sie diese nicht gelöst haben.

1(a) Es seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Definieren Sie im untenstehenden Feld den Binomialkoeffizienten $\binom{x}{n}$. Sie dürfen dabei eine Definition mit einer einzigen Formel oder alternativ eine Rekursionsvorschrift angeben.

Definition von $\binom{x}{n}$:

$$\binom{x}{n} := \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x-k+1).$$

Alternativ rekursiv:
Rekursionsanfang: $\binom{x}{0} := 1$, Rekursionsschritt: $\binom{x}{n+1} := \frac{x}{n+1}\binom{x-1}{n}$ oder leicht variiert auch: $\binom{x}{n+1} := \frac{x-n}{n+1}\binom{x}{n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1(b) Beweisen Sie im untenstehenden Feld die folgende Formel für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{2n}{n} = (-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \tag{1}$$

Beweis der Formel (1):
Vollständige Induktion über n.
Induktionsanfang, $n = 0$:

$$\binom{2 \cdot 0}{0} = 1 = (-4)^0 \binom{-\frac{1}{2}}{0}$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben, und es gelte die Formel (1) für dieses n.
Induktionsschritt: Zu zeigen ist:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = (-4)^{n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n+1}$$

Hierzu rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n+1} [2(n+1)-k+1] \quad \text{(Def. des Binomialkoeffizienten)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \frac{2(n+1)\cdot(2n+1)}{n+1} \prod_{k=3}^{n+2} [2(n+1)-k+1] \quad \begin{smallmatrix}\text{(Faktoren zu } k=1,2 \text{ abgespalten,}\\ \text{Faktor zu } k=n+2 \text{ erweitert)}\end{smallmatrix} \\
&= \frac{4(n+\frac{1}{2})}{n+1} \frac{1}{n!} \prod_{l=1}^{n} [2n-l+1] \quad \text{(gekürzt, Indexshift } k=l+2\text{)} \\
&= \frac{4(n+\frac{1}{2})}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{(nochmal Def. des Binomialkoeffizienten)} \\
&= \frac{4(n+\frac{1}{2})}{n+1} (-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \quad \text{(I.V. verwendet)} \\
&= (-4)^{n+1} \frac{-\frac{1}{2}-n}{n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \\
&= (-4)^{n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n+1} \quad \text{(Rekursionsgleichung für Binomialkoeffizienten verwendet)}
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

1(c) Beweisen Sie im untenstehenden Feld, dass die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n \tag{2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{4}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Der Konvergenzradius der binomischen Reihe soll bei diesem Beweis *nicht* als bekannt vorausgesetzt werden.

Beweis:
Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ nach der binomischen Formel

$$0 \le \binom{2n}{n} \le \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 4^n$$

also für $|z| < \frac{1}{4}$:

$$\left| \binom{2n}{n} z^n \right| \le (4|z|)^n$$

Die Potenzreihe $f(z)$ wird also durch die wegen $4|z| < 1$ in $\mathbb{R}$ konvergente geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4|z|)^n$$

majorisiert und ist daher selbst in $\mathbb{C}$ konvergent.
Alternative: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach der Rechnung in 1(a):

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{4(n+\frac{1}{2})}{n+1} \binom{2n}{n} \le \frac{4(n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} = 4 \binom{2n}{n},$$

also für $|z| < 1/4$:

$$\left| \binom{2(n+1)}{n+1} z^{n+1} \right| \le 4|z| \left| \binom{2n}{n} z^n \right|.$$

Wegen $4|z| < 1$ (gleichmäßig in n) konvergiert die Potenzreihe für $f(z)$ daher nach dem Quotientenkriterium. □

1(d) Geben Sie die Formel für die binomische Reihe an. Quantifizieren Sie auch alle darin frei vorkommenden Variablen. Gemeint ist die *unendliche* binomische Reihe, nicht die binomische Formel.

Binomische Reihe:
$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$ für $-1 < x < 1$ und $s \in \mathbb{C}$.

1(e) Welchen Wert besitzt die Potenzreihe $f(z)$ aus Formel (2) in Teilaufgabe 1(c) für $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < \frac{1}{4}$? Schreiben Sie die Antwort in möglichst vereinfachter Form in das folgende Feld. Bei dieser Teilaufgabe ist keine Begründung verlangt.

$$f(z) = (1-4z)^{-1/2} \text{ für } z \in \mathbb{R} \text{ mit } |z| < \frac{1}{4} \tag{3}$$

1(f) Formulieren Sie im untenstehenden Feld den Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen.

Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen:
Es sei $(a_n^{(i)})_{n,i \in \mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge in $[0, +\infty]$, so daß für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(a_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton steigt. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}, \tag{4}$$

wobei die Grenzwerte in $[0, +\infty]$ zu verstehen sind.

1(g) Welchen Wert in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ besitzt die folgende Reihe?

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 4^{-n} \tag{5}$$

Schreiben Sie den Wert in möglichst vereinfachter Form in das folgende Feld:

$$A = +\infty \tag{6}$$

Beweisen Sie Ihre Antwort im folgenden Feld:

Beweis der Formel (6):
Wir wählen irgendeine monton steigende Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $[0, \frac{1}{4}[$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k = \frac{1}{4}$, zum

Beispiel $z_k = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{k})$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Folge $\left(\binom{2n}{n} z_k^n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend mit nicht-negativen Werten und gegen $\binom{2n}{n}4^{-n}$ konvergent. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz und Formel (3) folgt:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \binom{2n}{n} z_k^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z_k^n = \lim_{k\to\infty} (1-4z_k)^{-1/2} = +\infty,$$

da $1 - 4z_k \downarrow 0$ für $k \to \infty$ und $x^{-1/2} \to +\infty$ für $x \downarrow 0$. □

2. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung. Es gelte:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

2(a) Mit welchem mathematischen Begriff wird die Aussage (7) benannt? Schreiben Sie die Antwort in das folgende Feld:

Aussage (7) $\Leftrightarrow$:
f_n konvergiert für $n \to \infty$ punktweise gegen f.

2(b) Beweisen Sie im untenstehenden Feld: Erfüllt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ :\ [|x-y| < \delta\ \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon] \tag{8}$$

und gilt die Aussage (7), so folgt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ :\ [|x-y| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon] \tag{9}$$

Achten Sie beim Beweis besonders auf eine logisch korrekte Darstellung, insbesondere auf den korrekten Umgang mit Quantoren und die Einführung freier Variablen in der richtigen Reihenfolge.

Beweis der Implikation "Aussage (8) $\wedge$ Aussage (7) $\Rightarrow$ Aussage (9)":

Wir nehmen die Aussagen (8) und (7) an. Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen zu $\epsilon' = \epsilon/3$ unter Verwendung der Annahme (8) ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ :\ [|x-y| < \delta\ \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}] \tag{A1}$$

Nun seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$ gegeben. Zu zeigen ist nun:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Wir wählen zu x und $\epsilon' = \epsilon/3$ unter Verwendung der Annahme (7) ein $m_x \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\forall n \geq m_x :\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{Ax}$$

Ebenso wählen wir zu y und $\epsilon' = \epsilon/3$ unter Verwendung der Annahme (7) ein $m_y \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\forall n \geq m_y :\ |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{Ay}$$

Nun setzen wir $n = \max\{n_x, n_y\} \in \mathbb{N}$. Wegen Aussage (A1) und $|x-y| < \delta$ schließen wir

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

und mit den Aussagen (Ax) und (Ay) schließen wir

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \qquad |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

2(c) Mit welchem mathematischen Begriff wird die Aussage (9) benannt? Schreiben Sie die Antwort in das folgende Feld:

Aussage (9) $\Leftrightarrow$:
f ist gleichmäßig stetig

3. 3(a) Formulieren Sie im untenstehenden Feld eine Version des Haupsatzes der Differential- und Integralrechnung. Dazu gehört auch die Darstellung der Voraussetzungen des Satzes.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Erste Version:
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

differenzierbar (einseitig differenzierbar am Rand) und es gilt $F^{'} = f$.
Alternative:
Zweite Version:
Es sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, d.h differenzierbar mit stetiger Ableitung (einseitig differenzierbar am Rand). Dann gilt:

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

3(b) Berechnen Sie

$$f(x) := \frac{d}{dx} \int_{\exp(x)}^{\exp(2x)} \frac{dt}{\log t} \tag{10}$$

für $x > 0$. Schreiben Sie das Ergebnis ohne Integralzeichen in möglichst vereinfachter Form in das folgende Feld:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \tag{11}$$

Begründen Sie Ihr Ergebnis (11) im folgenden Feld:
Es sei $F :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $1/\log t$, $t > 1$. Insbesondere gilt $F'(t) = 1/\log t$. Nach dem Hauptsatz (zweite Version) gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\exp(x)}^{\exp(2x)} \frac{dt}{\log t} = F(e^{2x}) - F(e^x)$$

und daher

$$\frac{d}{dx} \int_{\exp(x)}^{\exp(2x)} \frac{dt}{\log t} = F'(e^{2x}) \frac{de^{2x}}{dx} - F'(e^x) \frac{de^x}{dx} = \frac{2e^{2x}}{\log e^{2x}} - \frac{e^x}{\log e^x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

$\square$

4. 4(a) Stellen Sie $\sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ im folgenden Feld (12) als Linearkombination in $\mathbb{C}$ von Werten der komplexen Exponentialfunktion dar.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{12}$$

4(b) Es sei $k \in \mathbb{Z}$. Es bezeichne i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$. Welchen Wert besitzt das Integral in der nachfolgenden Formel (13)? Schreiben Sie die Antwort soweit wie möglich vereinfacht in die Antwortfelder in Formel (13). Unterscheiden Sie dabei zwei Fälle.

$$\int_0^\pi \exp(2ikx)\, dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{13}$$

Es ist keine Begründung zu Formel (13) verlangt.
Platz für Rechnungen zu Formel (13):

Begründung von Formel (13) (nicht verlangt):
1. Fall: $k = 0$. Hier ist der Integrand konstant gleich 1, und es folgt

$$\int_0^\pi \exp(2i \cdot 0x)\,dx = \int_0^\pi dx = \pi.$$

2. Fall: $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Hier gilt

$$\int_0^\pi \exp(2ikx)\,dx = \left[\frac{\exp(2ikx)}{2ik}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{\exp(2\pi ik) - 1}{2ik} = \frac{1-1}{2ik} = 0.$$

□

4(c) Es sei n eine *ungerade* natürliche Zahl. Welchen Wert besitzt das Integral in der nachfolgenden Formel (14)? Schreiben Sie die Antwort soweit wie möglich vereinfacht in das Antwortfeld in Formel (14).

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx = \pi \tag{14}$$

Hinweis: Es ist hier zweckmäßig, den Sinus mit der komplexen Exponentialfunktion darzustellen und dann den Integranden mit einer geometrischen Summe auszudrücken.

Begründen Sie Ihr Ergebnis in Formel (14) im folgenden Feld:

Begründung von Formel (14):
Es gilt für $0 < x < \pi$:

$$\frac{\sin(nx)}{\sin x} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} = e^{i(1-n)x}\frac{e^{2inx} - 1}{e^{2ix} - 1} = e^{i(1-n)x}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1-n)x}$$

Es folgt:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1-n)x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi e^{i(2k+1-n)x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \pi 1_{\{2k+1=n\}} = \pi,$$

wobei wir Formel (13) verwendet haben, sowie die Tatsache, dass für genau ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt: $2k + 1 = n$, weil n eine ungerade natürliche Zahl ist. □

5. 5(a) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, definiert auf einem offenen Intervall I. Weiter seien $x, y \in I$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Formulieren Sie im untenstehenden Feld (15) die Taylorformel für $f(y)$ bei Entwicklung um die Stelle x bis zur Ordnung m. Geben Sie auch im Feld (16) eine *quantitative* Darstellung des zugehörigen Restglieds an. Landausymbole gelten hier *nicht* als quantitative, sondern nur als qualitative Darstellung.

Taylorformel:

$$f(y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k + R_{m,x}f(y) \tag{15}$$

quantitative Restglieddarstellung:

$$R_{m,x}f(y) = \int_x^y \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(y-t)^m\,dt = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(y-x)^{m+1} \tag{16}$$

für ein geeignetes ξ zwischen x und y.

5(b) Beweisen Sie im untenstehenden Feld, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \le \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n \le \frac{1}{2n^2} \tag{17}$$

Hinweis: Es wird empfohlen, die Logarithmusfunktion mit der Taylorformel um die Stelle $x = n$ bis zur Ordnung $m = 1$ zu entwickeln, an der Stelle $y = n + 1$ auszuwerten und das Restglied abzuschätzen.

Beweis der Formel (17):
Für $f(y) = \log y$, $y > 0$ folgt: $f'(y) = 1/y$, $f''(y) = -1/y^2$ und daher mit der Taylorformel für $x, y > 0$:

$$\log y = \log x + \frac{y-x}{x} - \frac{(y-x)^2}{2\xi^2}$$

mit geeignetem ξ zwischen y und x. Im Spezialfall $y = n + 1$, $x = n$ folgt:

$$\log(n+1) = \log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\xi^2}$$

für geeignetes $\xi \in [n, n+1]$. Anders geschrieben:

$$\frac{1}{2\xi^2} = \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n$$

Nun gilt für solch ein $\xi \in [n, n+1]$:

$$0 \leq \frac{1}{2\xi^2} \leq \frac{1}{2n^2},$$

also die Behauptung (17). □

5(c) Beweisen Sie im untenstehenden Feld, dass die durch

$$C_n := -\log(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{18}$$

definierte Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.
Hinweis: Es ist sinnvoll, hier die Formel (17) zu verwenden.

Konvergenzbeweis:
Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$, schreiben wir $-\log(n+1)$ in der folgenden Form:

$$-\log(n+1) = -\log(n+1) + \log 1 = \sum_{k=1}^{n} [-\log(k+1) + \log k].$$

Es folgt:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} [\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k] \tag{19}$$

Der k-te Summand in dieser Summe ist nach Formel (17) nichtnegativ und durch $\frac{1}{2k^2}$ beschränkt. Insbesondere majorisiert die in $\mathbb{R}$ konvergente Reihe

$$\frac{1}{2}\zeta(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k^2} < \infty$$

die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k].$$

Die letzte Reihe konvergiert daher ebenfalls in $\mathbb{R}$. Wegen Formel (19) bedeutet das genau die Konvergenz der Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$. □