LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Michael Handrek, David Müller

Wintersemester 2015/2016
3. Februar 2016

Analysis einer Variablen

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung: ❑ 2015 ❑ 2011 ❑ Andere: __________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4, nicht beklebt), eine gebundene abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Σ
max. Punkte	20	15	15	15	15	20	100

Name: ____

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a), (c), (d) soweit wie möglich, und schreiben Sie die Zahl in (b) in der Form $x+iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ (aus der Vorlesung bekannte Formeln und Grenzwerte dürfen Sie ohne Beweis benutzen):

(a) (5 Punkte)

$$\left|\left((\sin i)^2 + (\cos i)^2\right)(-2+i)\right|^2$$

(b) (5 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{3}\right)^k$$

(c) (5 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\arctan\left(e^n\right)\right)$$

(d) (5 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}+\frac{3n}{2+2n}\right)$$

Lösung:

(a)

$$\left|\left((\sin i)^2 + (\cos i)^2\right)(-2+i)\right|^2 = |1\cdot(-2+i)|^2 = 4+1 = 5.$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{i}{3}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{i}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} = \frac{18}{13}+\frac{12}{13}i.$$

(c) Es ist $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\arctan\left(e^n\right)=0$, da $\arctan\left(e^n\right)$ beschränkt ist: $-\frac{\pi}{2}\le\arctan\left(e^n\right)\le\frac{\pi}{2}$. Also

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\arctan\left(e^n\right)\right) \overset{\cos\text{ stetig}}{=} \cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\arctan\left(e^n\right)\right) = \cos 0 = 1.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}+\frac{3n}{2+2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{3}{\frac{2}{n}+2}\right) = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Name: ____________________

Aufgabe B 2. [15 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := (ax)^\pi$, $a \in \mathbb{R}^+$. Finden Sie eine Formel für die n-te Ableitung von f, $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie sie mit einem Induktionsbeweis (aus der Vorlesung bekannte Ableitungen dürfen Sie dabei natürlich ohne Beweis benutzen).

Lösung:

Man berechnet

$$f'(x) = a\,\pi\,(ax)^{\pi-1}, \quad f''(x) = a^2\,\pi\,(\pi-1)\,(ax)^{\pi-2},$$

und erhält daraus die Vermutung

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad f^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = a^n \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\pi-k)\right)(ax)^{\pi-n}.$$

Beweis der Vermutung mit Induktion:

Induktionsverankerung ($n=1$): Für $n=1$ ergibt sich die Aussage

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = a\,\pi\,(ax)^{\pi-1} = a^1 \left(\prod_{k=0}^{0}(\pi-k)\right)(ax)^{\pi-1},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $f^{(n)}(x) = a^n \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\pi-k)\right)(ax)^{\pi-n}$, erhält man

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(f^{(n)}\right)'(x) &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \left(a^n \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\pi-k)\right)(ax)^{\pi-n}\right)' \\ &= a\cdot a^n\,(\pi-n)\left(\prod_{k=0}^{n-1}(\pi-k)\right)(ax)^{\pi-n-1} \\ &= a^{n+1}\left(\prod_{k=0}^{n}(\pi-k)\right)(ax)^{\pi-(n+1)}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____________________

Aufgabe B 3. [15 Punkte]

Betrachten Sie die Menge
$$M := \{z \in \mathbb{C} : \; z = n\, i, \; n \in \mathbb{N}\}.$$
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Ergebnisse der Vorlesung dürfen Sie dabei natürlich ohne Beweis benutzen):

(a) (5 Punkte) M ist beschränkt.

(b) (5 Punkte) M ist abgeschlossen.

(c) (5 Punkte) M ist kompakt.

Lösung:

(a) M ist nicht beschränkt: Wäre M beschränkt, so gäbe es $\mu \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\{|z| : \; z \in M\} \subseteq [0, \mu]$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu < n$. Dann ist für $z = ni \in M$: $|z| = n > \mu$, also $|z| \notin [0, \mu]$. Somit kann M nicht beschränkt sein.

(b) M ist abgeschlossen: Sei $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\alpha := \lim_{k \to \infty} z_k \in \mathbb{C}$. Wegen
$$\underset{z,w \in M}{\forall} \quad (z \neq w \;\Rightarrow\; |z - w| \geq 1)\,,$$
folgt
$$\underset{N \in \mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{k > N}{\forall} \quad z_k = N\, i = \alpha.$$
Insbesondere ist $\alpha \in M$ und M ist abgeschlossen.

(c) Da M nicht beschränkt ist, ist M auch nicht kompakt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [15 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion

$$f:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{für } x \in]0,1]. \end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Ergebnisse der Vorlesung dürfen Sie dabei natürlich ohne Beweis benutzen):

(a) (4 Punkte) f ist streng monoton.

(b) (4 Punkte) f ist injektiv.

(c) (7 Punkte) f ist konvex.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass f streng monoton fallend ist: Die Funktion $g :]0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, ist differenzierbar mit $g'(x) = -\frac{1}{2} < 0$. Somit ist g streng monoton fallend. Da f mit g auf $]0,1]$ übereinstimmt, ist auch f auf $]0,1]$ streng monoton fallend. Sei nun $x_1 := 0$ und $x_2 \in]0,1]$. Dann ist

$$f(x_1) = 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} = f(x_2).$$

Somit ist f auch auf $[0,1]$ streng monoton fallend.

(b) f ist injektiv, da f streng monoton fallend ist.

(c) Wir zeigen, dass f konvex ist. Zunächst gilt für die Funktion g aus (a), dass $g'' = 0 \geq 0$, so dass g konvex ist. Da f mit g auf $]0,1]$ übereinstimmt, ist f auf $]0,1]$ konvex. Sei nun $x_1 := 0$ und $x_2 \in]0,1]$. Dann ist für alle $\lambda \in [0,1]$,

$$A := f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) = f((1-\lambda)x_2) = -\frac{(1-\lambda)x_2}{2} + \frac{1}{2}$$

sowie

$$B := \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \lambda + (1-\lambda)\left(-\frac{x_2}{2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{(1-\lambda)x_2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Da $A \leq B$ gilt, ist gezeigt, dass f auch auf $[0,1]$ konvex ist.

Name: ______________________________

Aufgabe B 5. [15 Punkte]

Wir nennen eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ konvex genau dann, wenn

$$\underset{a,b\in C}{\forall} \quad \underset{\lambda\in[0,1]}{\forall} \quad \lambda a + (1-\lambda)b \in C.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) (10 Punkte) Beliebige Durchschnitte konvexer Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind wieder konvex.

(b) (5 Punkte) Beliebige Vereinigungen konvexer Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind wieder konvex.

Lösung:

(a) Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei C_i eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass dann auch

$$C := \bigcap_{i\in I} C_i$$

eine konvexe Menge ist: Seien $a, b \in C$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt

$$\underset{i\in I}{\forall} \quad a, b \in C_i.$$

Da alle C_i konvex sind, folgt

$$\underset{i\in I}{\forall} \quad \lambda a + (1-\lambda)b \in C_i.$$

Also ist $\lambda a + (1-\lambda)b \in C$, was zeigt, dass C konvex ist.

(b) Die Mengen $\{0\}$ und $\{1\}$ sind konvex, aber $A := \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$ ist nicht konvex, da

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin A.$$

Somit sind Vereinigungen konvexer Mengen i.A. nicht konvex.

Name: ____________________

Aufgabe B 6. [20 Punkte]

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Einschränkung $g := f\restriction_{]-\infty,a]}$ (bzw. $h := f\restriction_{[a,\infty[}$) in a stetig ist. Zeigen Sie, dass f genau dann in a stetig ist, wenn f in a linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

Lösung:

Sei f in a linksseitig und rechtseitig stetig. Sei $\epsilon > 0$. Zu ϵ gibt es, da g in a stetig ist, ein $\delta_1 > 0$ so, dass

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \Big(a - \delta_1 < x \leq a \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon\Big).$$

Da auch h in a stetig ist, gibt es auch ein $\delta_2 > 0$ so, dass

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \Big(a \leq x < a + \delta_2 \Rightarrow\; |f(x) - f(a)| = |h(x) - h(a)| < \epsilon\Big).$$

Sei nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ist dann $|a - x| < \delta$, so folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Somit ist f stetig in a.

Umgekehrt sei f stetig in a und $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ so, dass

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Für $|x - a| < \delta$ gilt dann im Fall $x \leq a$ auch $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ und im Fall $x \geq a$ auch $|h(x) - h(a)| < \epsilon$, was zeigt, dass g und h beide in a stetig sind, also f in a linksseitig und rechtseitig stetig ist.