LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Michael Handrek, David Müller

Wintersemester 2015/2016
3. Februar 2016

# Analysis einer Variablen

## Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung: ❏ 2015 ❏ 2011 ❏ Andere: ____________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________________________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4, nicht beklebt), eine gebundene abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 20 | 15 | 15 | 15 | 20 | 15 | 100 |
| | | | | | | | |

Name: ____________________

**Aufgabe A 1.** [20 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a), (c), (d) soweit wie möglich, und schreiben Sie die Zahl in (b) in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (aus der Vorlesung bekannte Formeln und Grenzwerte dürfen Sie ohne Beweis benutzen):

**(a)** (5 Punkte)

$$|e^{-17i}\,(5-3i)|^2$$

**(b)** (5 Punkte)

$$\frac{\binom{i+1}{2}}{2-2i}$$

**(c)** (5 Punkte)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp(\frac{1}{k}\sin k) - 1}{\frac{1}{k}\sin k}$$

**(d)** (5 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2}$$

Lösung:

(a)

$$|e^{-17i}\,(5-3i)|^2 = |e^{-17i}|^2 \cdot |5-3i|^2 = 1 \cdot (25+9) = 34.$$

(b)

$$\frac{\binom{i+1}{2}}{2-2i} = \frac{\frac{(i+1)\cdot i}{2}}{2-2i} = \frac{-1+i}{4-4i} = -\frac{1}{4}.$$

(c) Es ist $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sin k = 0$, da $\sin k$ beschränkt ist: $-1 \le \sin k \le 1$. Also

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp(\frac{1}{k}\sin k) - 1}{\frac{1}{k}\sin k} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}(-\frac{1}{2})^n + 3 - \frac{15}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\sin n + \frac{1}{n} + 2} = \frac{0+3-0}{0+0+2} = \frac{3}{2}.$$

Name: ______________________________

**Aufgabe A 2.** [15 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \ln x$. Finden Sie eine Formel für die $n$-te Ableitung von $f$, $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie sie mit einem Induktionsbeweis (aus der Vorlesung bekannte Ableitungen dürfen Sie dabei natürlich ohne Beweis benutzen).

Lösung:

Man berechnet

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

und erhält daraus die Vermutung

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad f^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n}.$$

Beweis der Vermutung mit Induktion:

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2 \cdot 0! \cdot x^{-1},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n}$, erhält man

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big(f^{(n)}\big)'(x) &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \big((-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n}\big)' = -(-1)^{n+1}\,n\cdot(n-1)!\,x^{-n-1} \\ &= (-1)^{n+2}\,n!\,x^{-(n+1)}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ________________________________________

**Aufgabe A 3.** [15 Punkte]

Betrachten Sie die Menge

$$M := \{y \in \mathbb{R} :\ y = \tan x,\ -e^{-1} \leq x < \pi^{-1}\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Ergebnisse der Vorlesung dürfen Sie dabei natürlich ohne Beweis benutzen):

**(a)** (5 Punkte) $M$ ist beschränkt.

**(b)** (5 Punkte) $M$ ist abgeschlossen.

**(c)** (5 Punkte) $M$ ist kompakt.

Lösung:

(a) Da tan auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton steigt und $-\frac{\pi}{2} < -1 < -e^{-1} < \pi^{-1} < 1 < \frac{\pi}{2}$, folgt, dass $\tan(-1)$ untere Schranke für $M$ und $\tan(1)$ obere Schranke für $M$ ist. Somit ist $M$ beschränkt.

(b) $M$ ist nicht abgeschlossen: Betrachte die Folge $x_n := \pi^{-1} - \frac{1}{n}$. Diese liegt (für $n$ groß genug) in $]-e^{-1}, \pi^{-1}[$, und es ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \pi^{-1}$. Da tan auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \tan x_n = \tan(\pi^{-1}) =: l.$$

Da $\tan x_n$ (für $n$ groß genug) in $M$ ist, aber $l \notin M$ (da ja tan hier streng monoton steigt), ist $M$ nicht abgeschlossen.

(c) Da $M$ nicht abgeschlossen ist, ist $M$ auch nicht kompakt.

Name: ______________________________

**Aufgabe A 4.** [15 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion

$$f:\,[-1,1]\longrightarrow[0,1],\quad f(x):=\begin{cases}x^2 & \text{für } x\in[-1,1[,\\ 0 & \text{für } x=1.\end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Ergebnisse der Vorlesung dürfen Sie dabei natürlich ohne Beweis benutzen):

**(a)** (5 Punkte) $f$ ist surjektiv.

**(b)** (5 Punkte) $f$ ist konvex auf $[-1,1[$.

**(c)** (5 Punkte) $f$ ist konvex auf $[-1,1]$.

(In (b) und (c) ist $f$ als $\mathbb{R}$-wertig zu betrachten, wie in der Konvexitätsdefinition der Vorlesung.)

Lösung:

(a) Da $f(-1)=1$ und $f(0)=0$ ist, ist $f$ nach dem Zwischenwertsatz surjektiv (da $f$ auf $[-1,0]$ stetig ist).

(b) Die Funktion $g:\,]-2,1[\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x):=x^2$, ist zweimal differenzierbar, mit $g''(x)=2>0$. Somit ist $g$ konvex. Da $f$ auf $[-1,1[$ mit $g$ übereinstimmt, ist $f$ auf $[-1,1[$ konvex.

(c) $f$ ist auf $[-1,1]$ nicht konvex: Zum Beispiel ist $f(0)=0$, $f(1)=0$, also

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}>\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)=0.$$

Name: ______________________________

**Aufgabe A 5.** [20 Punkte]

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Einschränkung $g := f\restriction_{]-\infty,a]}$ (bzw. $h := f\restriction_{[a,\infty[}$) stetig in $a$ ist. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann in $a$ stetig ist, wenn $f$ in $a$ linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

Lösung:

Sei $f$ in $a$ linksseitig und rechtseitig stetig. Sei $\epsilon > 0$. Zu $\epsilon$ gibt es, da $g$ in $a$ stetig ist, ein $\delta_1 > 0$ so, dass

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \Big(a - \delta_1 < x \leq a \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon\Big).$$

Da auch $h$ in $a$ stetig ist, gibt es auch ein $\delta_2 > 0$ so, dass

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \Big(a \leq x < a + \delta_2 \Rightarrow\; |f(x) - f(a)| = |h(x) - h(a)| < \epsilon\Big).$$

Sei nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ist dann $|a - x| < \delta$, so folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Somit ist $f$ stetig in $a$.

Umgekehrt sei $f$ stetig in $a$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ so, dass

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Für $|x - a| < \delta$ gilt dann im Fall $x \leq a$ auch $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ und im Fall $x \geq a$ auch $|h(x) - h(a)| < \epsilon$, was zeigt, dass $g$ und $h$ beide in $a$ stetig sind, also $f$ in $a$ linksseitig und rechtseitig stetig ist.

Name: ______________________________

**Aufgabe A 6.** [15 Punkte]

Wir nennen eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ offen genau dann, wenn

$$\underset{a \in O}{\forall} \quad \underset{\epsilon > 0}{\exists} \quad ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \subseteq O.$$

**(a)** (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Beliebige Vereinigungen offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind wieder offen.

**(b)** (5 Punkte) Geben Sie eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die nicht offen ist und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Lösung:

(a) Sei $I$ eine beliebige Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei $O_i$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass die Vereinigung

$$O := \bigcup_{i \in I} O_i$$

eine offene Menge ist. Sei $a \in O$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ so, dass $a \in O_{i_0}$. Da $O_{i_0}$ offen ist gilt:

$$\underset{\epsilon > 0}{\exists} \quad ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \subseteq O_{i_0} \subseteq O,$$

was bereits zeigt, dass auch $O$ wieder offen ist.

(b) Sei $A := \{0\}$. Dann gilt

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \quad ]-\epsilon, \epsilon[ \not\subseteq A$$

(zum Beispiel ist $\frac{\epsilon}{2} \in ]-\epsilon, \epsilon[$, aber $\frac{\epsilon}{2} \notin A$). Also kann $A$ nicht offen sein.