LMU | LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Mathematisches Institut
Prof. Dr. P. Müller
Dr. S. Morozov

Klausur
Samstag, den 31. Januar 2015

Analysis 1

Klausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Studiengang: ____________________

Ich stimme der Veröffentlichung des Ergebnisses dieser Klausur unter Angabe meiner Matrikelnummer zu. (Wenn nicht zutrifft, bitte ausstreichen!)

Bitte **schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus** und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.

Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.

Am Ende des Klausurheftes finden Sie eine extra Seite, mithilfe derer Sie Ihre Klausurdaten für eine statistische Untersuchung anonym freigeben können. Die Untersuchung soll der Verbesserung des Lehrangebotes dienen. Wenn Sie einverstanden sind, füllen Sie diese bitte entsprechend aus.

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Blatt der entsprechenden Aufgabe.

Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1. (*6 Punkte*)
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die

$$(z^3 + 1)e^{z^2} \cos(z + \mathrm{i}z) = 0$$

gilt.

Aufgabe 1

- $e^{z^2} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (\text{da } e^{\xi} \cdot e^{-\xi} = 1 \ \forall \xi \in \mathbb{C})$

- $z^3 = -1$ hat 3 Lösungen in $\mathbb{C}$ (Glg 3. Grades!)

  $z_1 = -1, \quad z_2 = e^{i\pi/3}, \quad z_3 = e^{-i\pi/3}$

- $\cos(z + iz) = 0 \iff z + iz = \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

  $\iff z = \frac{\pi}{1+i}\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 2. (*6 Punkte*)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x \sin x, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{sonst}; \end{cases}$$

gegeben. In welchen Punkten von $\mathbb{R}$ ist f

(a) stetig?

(b) differenzierbar?

Aufgabe 2

(a) 1. Fall Sei $a \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin x\end{array}$ (stetig!)
($\iff a = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$)

Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta$
$\Rightarrow |x \sin x| < \varepsilon$

Per def gilt $f(a) = 0$, also $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$:

$$|f(x) - f(a)| = |f(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |x \sin x|, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} < \varepsilon$$

2. Fall Sei $a \in \mathbb{R}$ keine Nullstelle von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$

sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{0} = 0$

sei $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$, $x_n \xrightarrow{n\to a} a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{x_n \sin x_n} = a \sin a \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)$ existiert nicht $\qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto x \sin x$ stetig

$\Rightarrow f$ nicht stetig in a

(6) $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ diff.bar in } a\} \subseteq \{a \in \mathbb{R} : f \text{ stetig in } a\} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Somit für $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und $x_n \neq a$:

$$d_n := \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \frac{f(x_n)}{x_n - a} = \begin{cases} \frac{x_n \sin x_n}{x_n - a}, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- somit für $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ mit $x_n \to a$: $d_n \xrightarrow{n\to\infty} (x \sin x)'\big|_{a=k\pi} = k\pi (-1)^k$

  und für $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to a$: $d_n = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

  $\Rightarrow$ nicht diff.bar für $k \neq 0$!

- für $k = 0$: $d_n = \begin{cases} \sin x_n, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \xrightarrow{x_n \to 0} 0 \Rightarrow$ diff.bar mit $f'(0) = 0$.

Aufgabe 3. (*6 Punkte*)

Berechne:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\tan x}), \qquad x \in]0, \pi/2[$;

(b) $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ und $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ für $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

(a) $\frac{d}{dx} \underbrace{x^{\tan x}}_{e^{\ln x \tan x}} = e^{\ln x \tan x} \cdot \underbrace{(\ln x \tan x)'}_{\frac{1}{x}\tan x + \ln x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}$

$= \tan x \; x^{\tan x - 1} + x^{\tan x} \frac{\ln x}{\cos^2 x}$

(b) f ist ungerade

(1) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$

(2) lokale Extrema:

f 2mal diff.bar auf $\mathbb{R}$ mit

- $f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2(1+x^2)\,2x}{(1+x^2)^4}$

$= (-2x)\frac{1+x^2+2(1-x^2)}{(1+x^2)^3} = (-2x)\frac{3-x^2}{(1+x^2)^3}$

$\Rightarrow f''(\pm 1) = \mp 2 \cdot \frac{2}{2^3} \lessgtr 0$

$\Rightarrow$ f hat bei ± 1 lok. Max. bzw. lok. Min.

mit $f(\pm 1) = \pm 1/2$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ lok. Extrema sind global $\Rightarrow$

$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1/2$, $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -1/2$

Aufgabe 4. (*6 Punkte*)

Seien f, g beliebig oft differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$. Beweise, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Leibnizsche Regel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

gilt. Hierbei bezeichnet $f^{(k)}$ die k–te Ableitung von f.

Aufgabe 4

$n = 0$: $(fg)^{(0)} = fg$

$n \to n+1$:

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \underbrace{f^{(n+1)} g^{(0)}}_{k=n+1} + \underbrace{f^{(0)} g^{(n+1)}}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{=: A} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$A = \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k}}_{\frac{n+1}{(n+1-k)\,k}} \Bigg) = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\Rightarrow (fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Aufgabe 5. (*6 Punkte*)

(a) Sei $(a_n)_n$ eine Folge nicht–negativer reeller Zahlen, so dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergent ist.

Beweise, dass dann auch die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert.

(b) Bleibt die Behauptung aus (a) auch ohne der Annahme über die Nicht–Negativität wahr? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

(c) Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. Drücke den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 z^n$ durch R aus.

Aufgabe 5

(a) $\sum_n a_n$ kgt. $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist Nullfolge

$a_n \geq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: a_n \in [0,1]$

also $a_n^2 \leq a_n$

$S_k := \sum_{n=1}^{k} a_n^2$ und für $l \geq k \geq N$ gilt

$$0 \leq S_l - S_k = \sum_{n=k+1}^{l} a_n^2 \leq \sum_{n=k+1}^{l} a_n = T_l - T_k \qquad (*)$$

wobei $T_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$

$\sum_n a_n$ kgt. $\Rightarrow (T_k)_k$ Cauchy $\overset{(*)}{\Rightarrow} (S_k)_k$ Cauchy

$\Rightarrow (S_k)_k$ kgt. ✓ [siehe nächste Seite für alternat. Argument]

(b) $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

- $\sum_n a_n$ kgt (Leibniz-Krit.)
- $\sum_n a_n^2 = \sum_n \frac{1}{n}$ dvgt.

Verallg. gilt also nicht!

(c) $R := \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1} \Rightarrow$

$$\tilde{R} := \Big(\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \underbrace{|a_n^2|^{1/n}}_{(|a_n|^{1/n})^2}}_{\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^2}\Big)^{-1} = R^2$$

alternatives Argument zu (Cauchy-Folgen in 5a): Monotonie

$(S_k)_k$ isoton, zeige $(S_k)_k$ beschränkt (denn $\Rightarrow$ kgt.!)

Also: (1) $S_k \leq S_N$ für $1 \leq k \leq N$

(2) $S_k = S_N + \sum_{n=N+1}^{k} \underbrace{a_n^2}_{\leq a_n} \leq S_N + T_k$ für k > N

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} S_k \leq S_N + \underbrace{\sup_{k\in\mathbb{N}} T_k}_{<\infty \text{ da } (T_k)_k \text{ kgt.}} < \infty$$

✓

Aufgabe 6. (*6 Punkte*)

Für $-\infty < a < b < \infty$ sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Beweise, dass dann die Funktionenfolge $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f^2 konvergiert.

Aufgabe 6

Sei $\varepsilon > 0$. N.V. $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in [a,b]$:
(o.E. sei $\varepsilon < 1$) $\qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |(f_n(x))^2 - (f(x))^2| = \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{< \varepsilon} \underbrace{|f_n(x) + f(x)|}_{< \varepsilon + 2|f(x)|}$$

f stetig (*) $\Rightarrow$ f nimmt Max. an auf Kompaktum
$\Rightarrow \exists M < \infty$ mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

also $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in [a,b]$

$$|(f_n(x))^2 - (f(x))^2| < \varepsilon \underbrace{(\varepsilon + 2M)}_{< 1 + 2M}$$

$\Rightarrow f_n^2$ kgt. glm. gegen f^2

(*) da f gleichmäßiger Limes stetiger Fkt'en!